

# 國中資優課程—融入式教案(數學)

## 淺談GSP

### 一、課程簡介

<p>給使用者的話</p>	<p>一、設計理念與教學動機:起源於學生好奇課本幾何圖形的精準度為何?此外,學生想要透過親自繪圖來驗證定理的一致性。</p> <p>二、基礎能力與先備知識:本課程為GSP動態幾何軟體的應用,學生須對基本幾何概念與尺規作圖有適當的瞭解才能進行。</p> <p>三、實作練習與教學期望:本課程之實作練習部分,旨在讓學生理解幾何的思辨不再唯一。除了有基本的尺規作圖外,更有其他多元的構圖工具,並透過小組成員之間的合作、操作、討論與發表等模式,來建構幾何學習的成就感。</p>						
<p>單元架構</p>							
<p>教材特色與分析</p>	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="555 1536 791 1615"> <p>一、教學目的</p> </td> <td data-bbox="791 1536 1520 1615"> <p>希望學生能從基礎的尺規作圖概念,延伸到電腦GSP動態幾何軟體的操作,並驗證所學定理。</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="555 1615 791 1742"> <p>二、教學活動</p> </td> <td data-bbox="791 1615 1520 1742"> <p>藉由教師的引導與操作,以及透過各小組的分享,形成組間學習及口語表達的練習,進而建構出學習型組織。</p> </td> </tr> <tr> <td data-bbox="555 1742 791 2078"> <p>三、教學架構</p> </td> <td data-bbox="791 1742 1520 2078"> <p>(1)初識GSP:以學生基礎的尺規作圖概念,套用至GSP的作圖概念,並能利用幾何的定義與性質操作出各種結果。</p> <p>(2)應用與操作:引導學生能從初識GSP的結果,應用在進階的幾何性質之探討與觀察。</p> <p>(3)創造與發想:學生能在教學活動中,發想出不同的操作結果,並勇於挑戰、克服問題,使得成果能夠更聚焦及收斂。</p> </td> </tr> </table>	<p>一、教學目的</p>	<p>希望學生能從基礎的尺規作圖概念,延伸到電腦GSP動態幾何軟體的操作,並驗證所學定理。</p>	<p>二、教學活動</p>	<p>藉由教師的引導與操作,以及透過各小組的分享,形成組間學習及口語表達的練習,進而建構出學習型組織。</p>	<p>三、教學架構</p>	<p>(1)初識GSP:以學生基礎的尺規作圖概念,套用至GSP的作圖概念,並能利用幾何的定義與性質操作出各種結果。</p> <p>(2)應用與操作:引導學生能從初識GSP的結果,應用在進階的幾何性質之探討與觀察。</p> <p>(3)創造與發想:學生能在教學活動中,發想出不同的操作結果,並勇於挑戰、克服問題,使得成果能夠更聚焦及收斂。</p>
<p>一、教學目的</p>	<p>希望學生能從基礎的尺規作圖概念,延伸到電腦GSP動態幾何軟體的操作,並驗證所學定理。</p>						
<p>二、教學活動</p>	<p>藉由教師的引導與操作,以及透過各小組的分享,形成組間學習及口語表達的練習,進而建構出學習型組織。</p>						
<p>三、教學架構</p>	<p>(1)初識GSP:以學生基礎的尺規作圖概念,套用至GSP的作圖概念,並能利用幾何的定義與性質操作出各種結果。</p> <p>(2)應用與操作:引導學生能從初識GSP的結果,應用在進階的幾何性質之探討與觀察。</p> <p>(3)創造與發想:學生能在教學活動中,發想出不同的操作結果,並勇於挑戰、克服問題,使得成果能夠更聚焦及收斂。</p>						

## 二、課程計畫

單元 名稱	淺談GSP	活動 時間	<u>三</u> 節 ( 每節 <u>45</u> 分，共 <u>135</u> 分)
編製者	建國國中 許俊中老師 建國國中 張吉逸老師 青埔國中 邱振源老師	適用 對象	國小： <input type="checkbox"/> 三年級 <input type="checkbox"/> 四年級 <input type="checkbox"/> 五年級 <input type="checkbox"/> 六年級 國中： <input type="checkbox"/> 七年級 <input checked="" type="checkbox"/> 八年級(僅適用第一節課程)  <input checked="" type="checkbox"/> 九年級(可適用第一、二、三節課程)
核心 素養	<p>一、創-J-A2 具備批判思考能力與習慣，區辨關鍵性問題，構思反省各種困難與解決策略。有效重組與提出最可能的問題解決模式。</p> <p>二、創-J-B2 具備善用科技、資訊與媒體以增進創造力學習的素養，思辨創造思考歷程中，個體與科技、資訊、媒體的互動關係。</p> <p>三、創-J-C2 具備友善、幽默的人際互動，支持他人、與他人合作營造有利創造的情境。能在不利創造的環境持續創造。並和團隊合作共同解決困難。</p>		
學習 表現	<p>數學領域課綱學習表現：</p> <p>s-IV-11理解三角形重心、外心、內心的意義和其相關性質</p> <p>s-IV-13理解直尺、圓規操作過程的敘述，並應用於尺規作圖。</p> <p>s-IV-14認識圓的相關概念（如半徑、弦、弧、弓形等）和幾何性質（如圓心角、圓周角、圓內接四邊形的對角互補等），並理解弧長、圓面積、扇形面積的公式</p> <p>1a-II-3 主動思索問題，嘗試尋求解答</p> <p>1c-II-2嘗試使用各種方法達成任務。</p> <p>2a-II-3 針對問題提出各種解決的構想。</p>		

學習 內容	<p>數學領域課綱學習內容：</p> <p>S-8-12 尺規作圖與幾何推理：複製已知的線段、圓、角、三角形；能以尺規作出指定的中垂線、角平分線、平行線、垂直線；能寫出幾何推理所依據的幾何性質</p> <p>S-9-7 點與圓的位置關係（內部、圓上、外部）；直線與圓的位置關係（不相交、相切、交於兩點）；圓心與切點的連線垂直此切線（切線性質）；圓心到弦的垂直線段（弦心距）垂直平分此弦。</p> <p>S-9-8 三角形的外心：外心的意義與外接圓；三角形的外心到三角形的三個頂點等距；直角三角形的外心即斜邊的中點。</p> <p>S-9-9 三角形的內心：內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形的面積＝周長×內切圓半徑÷2；直角三角形的內切圓半徑＝（兩股和一斜邊）÷2</p> <p>S-9-10 三角形的重心：重心的意義與中線；三角形的三條中線將三角形面積六等份；重心到頂點的距離等於它到對邊中點的兩倍；重心的物理意義。</p> <p><b>一、創思技巧</b></p> <p>（一）分類與歸納的方法</p> <p><b>二、創意人特質</b></p> <p>（一）展現點子的策略</p> <p>（二）有效的提問策略</p> <p>（三）想像力具體化與步驟化</p>
----------	--

區分性 教學之 調整	區分性課程調整			
	分組調整	高斯組	尤拉組	亞里斯多德組
	內容調整	除了學習單基本任務外，也解決大魔王加分題。	完成學習單基本任務	完成學習單前半部任務
	過程調整	具備現象、難題有發現與討論，並嘗試用GSP工具解決問題。	處於高斯組與亞里斯多德組之間的橋樑，協助兩組之間的溝通與協調。	1.能理解幾何基本性質與定義。 2.能理解基本尺規作圖 3.清楚GSP介面、簡單操作與構圖。
	成果評量	熟練基本操作，除了能夠嘗試用不同的方法構思外，也能再進一步延伸問題的導向，形成發現與創造。	熟悉基礎操作，並能夠嘗試用不同的方法構思與解決問題。	熟悉基礎操作，並分享學習過程的心得與困難之處。
參考資料	1.尤拉線（重心、垂心、外心三點共線），出版社：高中數學龍騰、國中數學康軒 2.道同互相為「蒙」—蒙日定理共點共線共圓的問題探討與推廣（第57屆中小學科學展覽會作品說明書）			
教學資源	1.學習單 2.GSP動態幾何軟體 3.筆記型電腦			

### 三、各單元教學活動

第一節教學活動	時間	多元 評量
<p><b>一、引導活動</b> 1.介紹GSP軟體之補充教材</p> <p><b>二、發展活動</b> 1.複習簡易操作與各功能鍵 2.GSP實作練習 3.學習單小組競賽</p> <p><b>三、綜合活動</b> 1.小組成果發表 2.大魔王加分挑戰題</p>	<p>5分鐘</p> <p>5分鐘 5分鐘 20分鐘</p> <p>5分鐘 5分鐘</p>	<p>口頭評量</p> <p>學習單 觀察評量 操作評量</p> <p>成果發表評量</p>
第二節教學活動	時間	多元 評量
<p><b>一、引導活動</b> 1.複習兩圓半徑與公切線之圖形關聯性、直徑與圓周角 2.複習GSP線段中點、過點作垂直線</p> <p><b>二、發展活動</b> 1.GSP實作練習內公切線、外公切線 2.學習單小組競賽</p> <p><b>三、綜合活動</b> 1.小組成果發表 2.大魔王加分挑戰題</p>	<p>5分鐘 5分鐘</p> <p>10分鐘 15分鐘</p> <p>5分鐘 5分鐘</p>	<p>口頭評量</p> <p>學習單 觀察評量 操作評量</p> <p>成果發表評量</p>
第三節教學活動	時間	多元 評量
<p><b>一、引導活動</b> 1.複習外心、重心 2.補充垂心</p> <p><b>二、發展活動</b> 1.GSP繪製三角形的外心、重心、垂心 2.驗證三心共線，尤拉線 3.驗證任意三角形均具備尤拉線</p> <p><b>三、綜合活動</b> 1.學習單小組競賽 2.大魔王加分挑戰題</p>	<p>5分鐘 5分鐘</p> <p>10分鐘 10分鐘 5分鐘</p> <p>5分鐘 5分鐘</p>	<p>口頭評量</p> <p>學習單 觀察評量 操作評量</p> <p>成果發表評量</p>

#### 四、教學省思及建議

<p>第一節課</p> <p>教學特色:1. 透過GSP繪圖軟體將科技資訊能力融入教學活動中，倘若以後學生就讀「電子電機」「土木工程」「室內空間設計」等科系，也能將所學融入其中。</p> <p>2. 課程為GSP操作介面教學，於教學過程中透過學生對於幾何圖形先備知識，逐漸引導學生將幾何性質轉化為標準的作圖步驟。</p> <p>反思建議:在家線上課程侷限於電腦與軟體設備，若是學生缺乏設備、軟體操作能力或是分心，教師無法即時引導學生學習與多元評量(學生分享畫面等待時間過久、小組成員無法即時合作討論)，因此建議此類課程應採用在校實體授課，方達成效。</p>
<p>第二節課</p> <p>教學特色:圓周上的切線→圓外一點對圓作切線→內公切線、外公切線。課程架構完整，目標明確，環環相扣，且易引導學生將尺規作圖轉換GSP步驟</p> <p>反思建議:1. 半徑不同的兩圓，在距離不同時，公切線數量的變化。看似課本中較簡單的性質，但作圖時需做出最多4條公切線的情形，再隨著位置變化公切線消失。作圖過程過於繁瑣。</p> <p>2. 學生實作上所需的時間易超過一節課，線段相加相減步驟建議可移到第一節課。</p>
<p>第三節課</p> <p>教學特色：由中垂線交點進入外心、中線交點進入重心，再將三心結合進入尤拉線。 課程設計上循序漸進，透過GSP作圖，驗證課本上諸多定理，學生樂於學習。</p> <p>反思建議：1. 課程內容偏多，在尤拉線部分，垂心、重心、外心可直接作圖即可，</p> <p>2. 外公切線→蒙日線的連結，與垂心、重心、外心、尤拉線較無關聯，學生對於蒙日線較無感，建議可將它結合切線相關等性質獨立成另一堂課程，或者只單純作為課外延伸閱讀。</p>

## 五、附件

GSP 繪圖實作學習單(一) 組員:\_\_\_\_\_

請依據下列各題意所需的幾何條件，作出適當的圖形，並將你的繪圖成果複製、剪輯、儲存於下列表格中。

1. 請作一線段 $\overline{AB}$ 。	2. 以 $\overline{AB}$ 為邊長的正 $\triangle ABC$ 。
3. 以 $\overline{AB}$ 為邊長的正方形 $ABCD$ 。	4. 以 $\overline{AB}$ 長度為對角線的正方形 $PQRS$ 。
<p style="text-align: center;">大魔王加分挑戰題?</p> <p>你繪出一個直角三角形<math>\triangle ABC</math>，其中<math>\angle A=90^\circ</math>，<math>\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}:2</math>，並且利用GSP上的[度量]功能鍵，檢驗其三個內角分別是<math>30^\circ</math>、<math>60^\circ</math>、<math>90^\circ</math></p>	

GSP繪圖實作學習單(二) 組員:\_\_\_\_\_

請依據下列各題意所需的幾何條件，作出適當的圖形，並將你的繪圖成果複製、剪輯、儲存於下列表格中。

1. 請利用兩圓半徑、連心線段長、畢氏定理等關係，作兩圓的外公切線。

2. 請利用兩圓半徑、連心線段長、畢氏定理等關係，作兩圓的內公切線。

大魔王加分挑戰題

請在不使用「切線」工具，作出圓外一點對圓作兩切線。



GSP繪圖實作學習單(三) 組員:\_\_\_\_\_

請依據下列各題意所需的幾何條件，作出適當的圖形，並將你的繪圖成果複製、剪輯、儲存於下列表格中。

1. 作一三角形的外心，並作其外接圓。	2. 作一三角形的重心。
3. 作一三角形的垂心（三高交點）。 提醒：有些情形需要作邊的延長線	4. 將三角形的外心、重心、垂心連線， 並用檢驗工具驗證三點共線。

## GSP繪圖實作學習單(四) 進階延伸思考題 組員:\_\_\_\_\_

\*說明:此份學習單為進階延伸思考，請你依據下列各題的引導進行作圖，並發揮圖形觀察力，你將有意想不到的收穫!

腦力激盪題:

1. 已知 $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 是三個不同半徑的相異圓，請嘗試做出兩兩之間的外公切線，並觀察這些外公切線的交點有何關聯性?
  
2. 請在任意三角形中，分別作出其外心、重心與垂心，並連接 $\overline{OG}$ 、 $\overline{GH}$ 。請觀察或測量 $\overline{OG}$ 、 $\overline{GH}$ 兩者之間的長度關係，你有何發現或猜測嗎?是否可以驗證你的發現或猜測是正確的?
  
3. 請你透過網路拜請 Google 大神，搜尋[蒙日線]與[尤拉線]，你將在朦朧的數學世界裡，發現一道曙光，正引導你邁向微妙的學海。

# 國中資優數學融入式教案

## 淺談GSP繪圖軟體

授課教師:建國國中許俊中老師  
教案設計:建國國中許俊中老師  
建國國中張吉逸老師  
青埔國中邱振源老師

### 第一堂課 起手式

#### ○ 一、引導活動

- 1.學習動機與生活應用
- 2.介紹GSP軟體之補充教材  
(推薦網站:1.昌爸工作坊—教學媒體  
2.台師大數學系陳創義教授,  
3.高師大數學系GSP3.0動態幾何教學手冊)
- 3.建國國中採用康軒版數學教材，為考慮學生課程熟悉度，因此教學所需圖片一律採用康軒版課本圖形。

#### ○ 二、發展活動

- 1.複習各功能鍵與簡易操作
- 2.GSP實作練習
- 3.學習單小組競賽

#### ○ 三、綜合活動

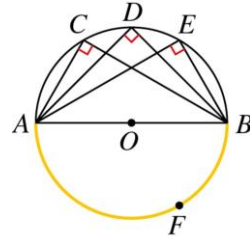
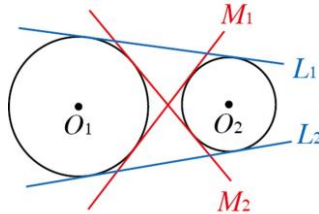
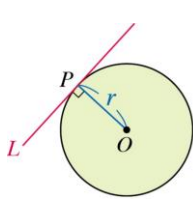
- 1.小組成果發表
- 2.大魔王加分挑戰題

## 學習單(一)

- 1.請作一線段 $\overline{AB}$ 。
- 2.以 $\overline{AB}$ 為邊長的正 $\triangle ABC$ 。
- 3.以 $\overline{AB}$ 為邊長的正方形 $ABCD$ 。
- 4.以 $\overline{AB}$ 長度為對角線的正方形 $PQRS$
- 5.大魔王加分挑戰題
  - 請你繪出一個直角三角形 $\triangle ABC$ ，其中 $\angle A=90^\circ$ ， $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}:2$ ，並且利用GSP上的[度量]功能鍵，檢驗其三個內角分別是 $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$

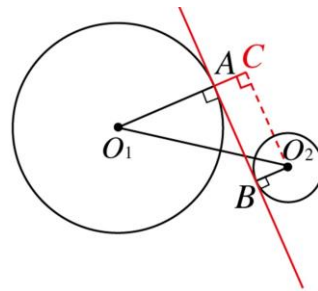
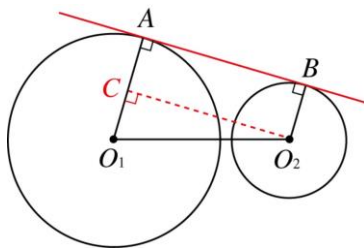
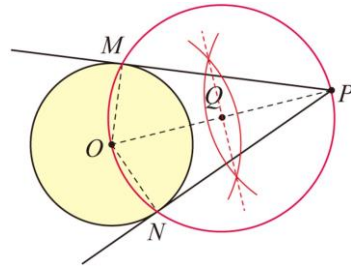
## 第二堂課 渾圓式-1

- 一、引導活動
- 1.複習(1)圓與切線
  - (2)兩圓內、外公切線意義
  - (3)直徑與圓周角
- 2.複習GSP線段中點、過點作垂直線



## 第二堂課 渾圓式-2

- 一、引導活動
- 3.圓外一點P做切線 $\overline{PM}$
- 4.分析兩圓外公切線與半徑關係
- 5.分析兩圓內公切線與半徑關係



## 第二堂課 渾圓式-3

- 二、發展活動
- 1.GSP實作練習內公切線、外公切線
- 2.學習單小組競賽
- 三、綜合活動
- 1.小組成果發表
- 2.大魔王加分挑戰題

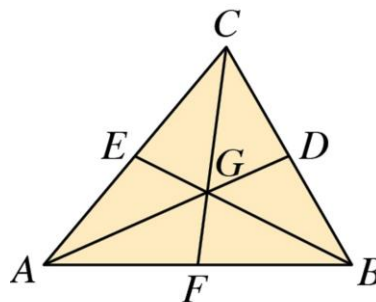
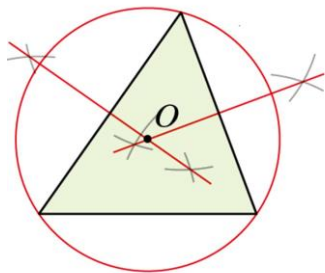
## 學習單(二)

- 1. 請利用畢氏定理探討外公切線段與兩圓半徑的關係，並依此作兩圓外公切線。
- 2. 請利用畢氏定理探討內公切線段與兩圓半徑的關係，並依此作兩圓內公切線。
- 大魔王加分挑戰題
- 請在不使用「切線」工具，作出圓外一點對圓作兩切線。



## 第三堂課 綜合式-1

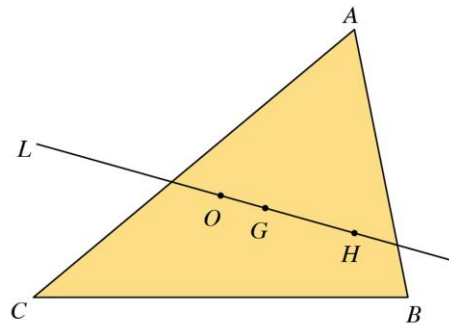
- 一、引導活動
- 1. 複習外心、重心
- 2. 補充垂心



### 第三堂課 綜合式-2

#### 二、發展活動

- 1. GSP繪製三角形的外心、重心、垂心
- 2. 驗證三心共線，尤拉線
- 3. 驗證任意三角形均具備尤拉線



### 第三堂課 綜合式-3

- 三、綜合活動
- 1. 學習單小組競賽
- 2. 大魔王加分挑戰題

### 學習單(三)

- 1. 作一三角形的外心，並作其外接圓。
- 2. 作一三角形的重心。
- 3. 作一三角形的垂心（三高交點）。  
提醒：鈍角三角形需要作邊的延長線。
- 4. 將三角形的外心、重心、垂心連線，  
並用檢驗工具驗證三點共線。



### 學習單(四)

1. 已知 $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 是三個不同半徑的相異圓，請嘗試做出兩兩之間的外公切線，並觀察這些外公切線的交點有何關聯性？
2. 請在任意三角形中，分別作出其外心、重心與垂心，並連接 $\overline{OG}$ 、 $\overline{GH}$ 。請觀察或測量 $\overline{OG}$ 、 $\overline{GH}$ 兩者之間的長度關係，你有何發現或猜測嗎？是否可以驗證你的發現或猜測是正確的？
3. 請你透過網路拜請Google大神，搜尋[蒙日線]與[尤拉線]，你將在朦朧的數學世界裡，發現一道曙光，正引導你邁向微妙的學海。





## 參考資料

1. 參考網站:
  - (1) 昌爸工作坊—教學媒體
  - (2) 台師大數學系陳創義教授,
  - (3) 高師大數學系GSP3.0動態幾何教學手冊)
2. 國中康軒數學課本第四冊(單元2-3尺規作圖)、  
第五冊(單元2-1~2-2圓 單元3-2三心)
3. 高中龍騰數學教師手冊-尤拉線
4. 全國科展第57屆高中數學作品-道同互相為(蒙)

The End!

