

國中資優課程—融入式教案(數學)

費波納契數列

一、課程簡介

<p>給使用者的話</p>	<p>本教案適用八年級學生，具部分數學運算基礎，藉由費波納契算術書中的經典故事帶入費波納契數列，加入巴斯卡三角形、黃金比例等觀念，可視情況加入校園或社區中植物讓學生實際踏察，讓學生體察生活即數學的樂趣。最後引入 PATTERN 數字感觀察，融入剪紙拼湊活動，提供費氏數列的有趣題目供程度較佳的學生探索。</p>
<p>單元架構</p>	<ol style="list-style-type: none">1. 介紹費波納契數列由來及其典故，引入函數概念，利用遞迴函數(數列)表示式表示費波納契數列，本次不加入求出遞迴函數的一般式計算2. 在校園中實地踏察找出生活中的費氏數—或是利用實物及圖片找出植物中的費氏數分析費氏數列與黃金比例或巴斯卡三角形的關係、前後項比例關係、額外3. 介紹費氏鐘，請學生等議題費式螺線4. 介紹黃金比例，融入一元二次方程式運算、近似值，人體中的黃金比例，並視情形加入白銀比例、A4 紙摺出黃金比例的摺紙活動等5. 介紹巴斯卡三角形，並加入費氏數美妙關係6. 鼓勵學生發現新 PATTERN，並在圖形拼湊中發現費氏數列的存在及特性
<p>教材特色與分析</p>	<p>本教案由數學史引入費氏數列的觀念，引導學生利用圖示表示數學觀念，觀察出費氏數列的規則，並加以延伸。加入黃金比例概念後，亦可以融入人體與黃金比例之間的關係與費氏數列在自然界的觀察。讓學生體會數學與自然之美。最後在引入遞迴關係式，提升學生在數學上的能力。</p>

二、課程計畫

單元名稱	費波納契數列	活動時間	3 節 (每節 45 分，共 135 分)
編製者	桃園國中 莊馥毓老師 同德國中 蕭任嫻老師	適用對象	國中八年級學生
核心素養	<p>數-J-A1 對於學習數學有信心和正向態度，能使用適當的數學語言進行溝通，並能將所學應用於日常生活中。</p> <p>數-J-A3 具備識別現實生活問題和數學的關聯的能力，可從多元、彈性角度擬訂問題解決計畫，並能將問題解答轉化於真實世界</p> <p>數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能認識統計資料的基本特徵。</p> <p>數-J-B3 具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養，並能在數學的推導中，享受數學之美。</p> <p>數-J-C1 具備從證據討論與反思事情的態度，提出合理的論述，並能和他人進行理性溝通與合作。</p>		
學習表現	<p>n-III-9 理解比例關係的意義，並能據以觀察、表述、計算與解題，如比率、比例尺、速度、基準量等</p> <p>n-III-10 嘗試將較複雜的情境或模式中的數量關係以算式正確表述，並據以推理或解題。</p> <p>r-III-3 觀察情境或模式中的數量關係，並用文字或符號正確表述，協助推理與解題。</p> <p>n-IV-5 理解二次方根的意義、符號與根式的四則運算，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>n-IV-6 應用十分逼近法估算二次方根的近似值，並能應用計算機計算、驗證與估算，建立對二次方根的數感。</p> <p>n-IV-7 辨識數列的規律性，以數學符號表徵生活中的數量關係與規律，認識等差數列與等比數列，並能依首項與公差或公比計算其他各項。</p> <p>a-IV-6 理解一元二次方程式及其解的意義，能以因式分解和配方法求解和驗算，並能運用到日常生活的情境解決問題。</p> <p>n-IV-9 使用計算機計算比值、複雜的數式、小數或根式等四則運算與三角比的近似值問題，並能理解計算機可能產生誤差。</p>		

學習內容	<p>N-8-1 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。</p> <p>N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性）</p> <p>A-8-7 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。</p> <p>N-10-5 數值計算的誤差：認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。</p> <p>N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法</p>
------	--

單元目標	<p>藉由自製圖表發想並認識費波納契數列，了解費氏數列在生活中的應用，包含其藏身在生物學界中植物的特殊排列(葉序，子房數，鳳梨及松果螺線數)，費氏數列的特殊性與黃金比例、巴斯卡三角形、比例式的關係。搭配富饒趣味的費氏數列鐘及踏察課程，讓學生體會無所不在的數學，最後利用數學關係式請學生觀察 PATTERN，以美妙的數學作為結尾。鼓勵學生可以自學一般式或是遞迴式關係</p>
------	--

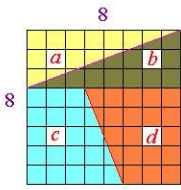
區分性教學之調整	區分性課程調整			
	分組	高斯組	尤拉組	黎曼組
	內容	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用自製圖表了解費氏數列，與黃金比例之間的關係 2. 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 3. 認識數列：生活中常見的數列及其規律性 4. 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。 5. 能理解並能發想費氏鐘的概念，可繪製費氏鐘、費氏螺線 6. 能觀察並發想出費氏數列相關 PATTERN 6. 自主學習建立遞迴觀念 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用自製圖表了解費氏數列，與黃金比例之間的關係 2. 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 3. 認識數列：生活中常見的數列及其規律性 4. 一元二次方程式的解法與應用：利用因式分解、配方法、公式解一元二次方程式；應用問題；使用計算機計算一元二次方程式根的近似值。 5. 能理解費氏鐘的概念，可繪製費氏鐘、費氏螺線 6. 能觀察並發想費氏數列相關 PATTERN 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 利用自製圖表了解費氏數列，與黃金比例之間的關係 2. 二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算。 3. 認識數列：生活中常見的數列及其規律性

	過程	可自主學習 探索遞迴或是一般式表示式	依照老師指示進行課程 內探索	能完成費氏數列及黃金 比例學習單圖表書寫部 分
	成果 評量	精熟度達 85% 可以靈活運用費式數列 、黃金比例、巴斯卡三 角形、遞迴關係式或一 般式皆可靈活運算。發 現生活中的費氏數，發 想較有創意的數學 PATTERN	精熟度達 75% 可以運用費式數列，黃 金比例，巴斯卡三角形 的觀念。發現生活中的 費氏數，發想基本 PATTERN	精熟度達精熟度達 75% 可以運用費式數列，黃 金比例，巴斯卡三角形 的觀念，發現生活中的 費氏數
參考 資料	http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html#petals http://math1.ck.tp.edu.tw/(建中數學科) https://www.shs.edu.tw/works/essay/2014/11/2014110315304461.pdf 費氏數列的奧秘			
教學 資源	投影機、學習單、網路資源、布(卷)尺、計算機(具計算功能之手機)、直尺、圓規、色紙、 美工刀、鳳梨、膠帶			

三、各單元教學活動

第一節教學活動	時間	多元評量
<p>一、引導活動 介紹費波納契生平，算術書及經典生兔子故事</p> <p>二、發展活動 1、引導學生能用圖表表示小兔子生生不息的圖形關係。 2、找出費氏數列關係，並能用數列表式表示費氏數列。 3、融入生物科校園植物踏察尋找花瓣數、鳳梨鱗片數等，介紹生活中的費氏數</p> <p>三、總結活動 1、介紹費氏數列鐘，請學生在提示之下找出斐詩中的運作規則</p>	<p>10</p> <p>25</p> <p>10</p>	<p>口頭評量 觀察評量 學習單 小組討論</p>
第二節教學活動	時間	多元評量
<p>一、引導活動 介紹黃金比例、巴斯卡三角形、比值</p> <p>二、發展活動 1、黃金比例介紹:人體的黃金比例、要穿多高的鞋子、A4 紙摺出黃金矩形 2、巴斯卡三角形介紹:巴斯卡三角形與費氏數列的關係 3、判斷費氏數列前後項的比例關係符合黃金比例[比例式介紹:比值=後項/前項] 4、利用 A4 紙摺出黃金矩形活動</p> <p>三、總結活動(擇一即可) 名作中的黃金比例 生活中的黃金比例(可補充白銀比例)、五芒星、相似三角形中(36-72-72)黃金比</p>	<p>5</p> <p>30</p> <p>10</p>	<p>口頭評量 觀察評量 學習單 小組討論</p>
第三節教學活動	時間	多元評量
<p>一、引導活動 觀察費氏數列中的數學 PATTERN 1、1、2、3、5、8、13.....</p> $f_4^2 = f_3 \times f_5 - 1$ $f_5^2 = f_4 \times f_6 + 1$ <p style="text-align: center;">...</p> $f_{奇}^2 = f_{前} \times f_{後} + 1$ $f_{偶}^2 = f_{前} \times f_{後} - 1$ <p>鼓勵學生討論並發表他們發現的數列 PATTERN</p> <p>二、發展活動 1、觀賞動畫 http://letitbe.ncue.edu.tw/ibl/mathq/6465.htm</p>	<p>5</p> <p>10</p> <p>20</p>	<p>口頭評量 觀察評量 學習單 小組討論</p>

並實作:利用方格紙作如下切割，接著拼湊出長方形



$$8 \times 8 = 64$$

(圖片參考 <https://blog.xuite.net/isdp2008am/wretch/123046230>)

可引入行列式說明空格處面積=1

PS 可提問:怎樣的切割比會讓中間的空格最小?

三、總結活動

學生思考:

- 1、費氏數列何時為 5 的倍數?並推論
- 2、費氏數列中，第 N 項除以 5 的餘數($f_x \equiv ? \pmod{5}$)
- 3、n 位數中，存在 1&0 的排列組合，位數中任兩個相鄰位數不同為 0
試求 n=1、2、3、4、5.....的情形各有多少種?你發現了甚麼?
- 4、

10

四、教學建議

希望以小組教學，
教學布置為 3-4 人一組
已有投影機及布幕之教室優先

費盡心機，費氏數列

學習單製作:桃園國中莊馥毓、同德國中蕭任嫻老師

單元 1: 認識費氏數列

義大利數學家 **Leonardo Bonacci** 在他的〈計算之書〉中，提出了一個關於兔子繁殖的問題:

一對小兔出生後兩個月就能長成大兔，可以生小兔，可生育的大兔子都不會累，每個月可以生一對小兔，而且剛好是雄雌各一。此外，這些兔子永生不死，如果現在有一對剛出生的小兔子，請問一年後總共會有幾對兔子？

請利用圖表表達你的推論

由此可知，從第一個月開始以後每個月的兔子總數是:

若把上述數列繼續寫下去，得到的數列便稱為費波那契數列

則此數列之表示式可為_____，

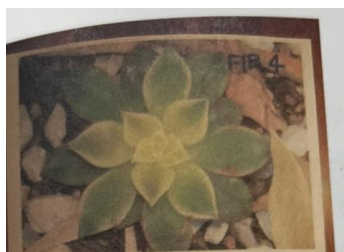
以函數方式表示式則為_____，

此種函數寫法，我們稱之為遞迴函數

單元 1-1 生活中的費氏數-實地踏察找找費氏數

(1) 葉序:葉子在莖上著生的順序，稱為葉序

若是把最底下的葉子當作 0 號，那麼往上陸續編成 1 號、2 號、3 號，編到第 3 號的時候，第 3 號的葉子剛好和第 0 號是同一個位置角度，也就是 3 片葉子沿著莖繞了 1 圈，我們將其記作 $1/3$ (可以想成:繞 1 圈要 3 片葉子)。



(2) 走訪校園，觀察校園內植物的花朵及葉片分布，記錄下你所觀察到的花瓣數或是與費氏數相關的訊息

花瓣數:請在校園中找尋開花的花，請記下你找到的花朵名稱及對應的花瓣數

植物名	葉序	花瓣數	其他你發現到的訊息

想一想:為何植物會以這樣的關係分布葉面呢?

(3) 下圖為不同角度拍攝同一顆鳳梨，然後拼貼在一起
(以下照片皆取自網路-阿簡的生物筆記)



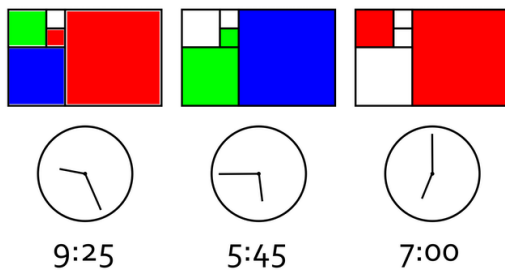
單元 1-1 生活中的費氏數-費氏數列鐘

費波那契時鐘，是個十分迷人的設計時鐘。

時鐘既美麗又有趣，使用著名的費氏數列，以全新的方式顯示時間



你可以由以下的圖示猜測出這個鐘的使用方式嗎?



知道規則後，你可以知道以下三種鐘面各是表示甚麼時刻嗎?



單元 2 黃金比例

1、「黃金比例 (the golden ratio)」又叫「黃金分割律」，是數學上的經典議題。 在《幾何原本》中對黃金比例做了以下的定義：

「若將一線段分割成長短兩段，且長段與短段的比，恰好等於全長與長段的比。則稱此種分割稱為 」

2、假設長段為 x ，短段為 1，並利用上述的定義可列出比例式



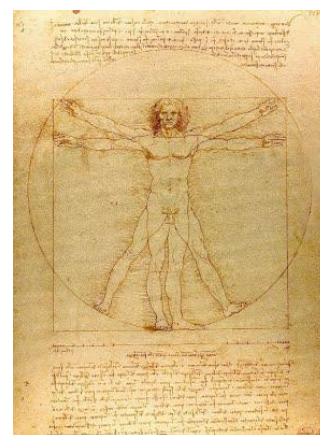
利用經過解方程式可得長段：短段的比值 = ，
這個比例稱為 。其近似值為

單元 2-1 實地測量

人體中有許多比例都符合(或接近黃金比例)，讓我們來找找組員中是否存在黃金比例人:(1)找出一位模特兒(2)量出以下尺碼

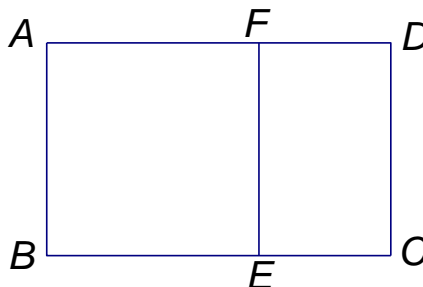
a	b	a/b
身高	髖骨高	
髖骨高	膝蓋高	
手臂長	手肘長	

若此人想藉由穿鞋讓自己符合黃金比例，那麼他應該要穿多高的鞋子才行?



單元 2-2 黃金矩形(彈性運用)

如圖，在矩形 ABCD 中，截去一個最大的正方形 ABEF 後，剩下的矩形 CDFE 跟原矩形的長寬比相同。我們就說這樣的矩形為黃金矩形。試求出原矩形 ABCD 的長：寬的比值？(假設 $\overline{AB}=1$ ，則 $\overline{AD}=?$)



下面這個矩形是一個黃金矩形。已知在切割出最大正方形後，剩餘矩形長寬比會與原矩形長寬比相同。此時，利用圓規在正方形的兩端點依序畫出四分之一圓，可畫出著名的「等角螺線」

根據上述，利用直尺和圓規在下方黃金矩形中畫出等角螺線。(作出 5 次切割)

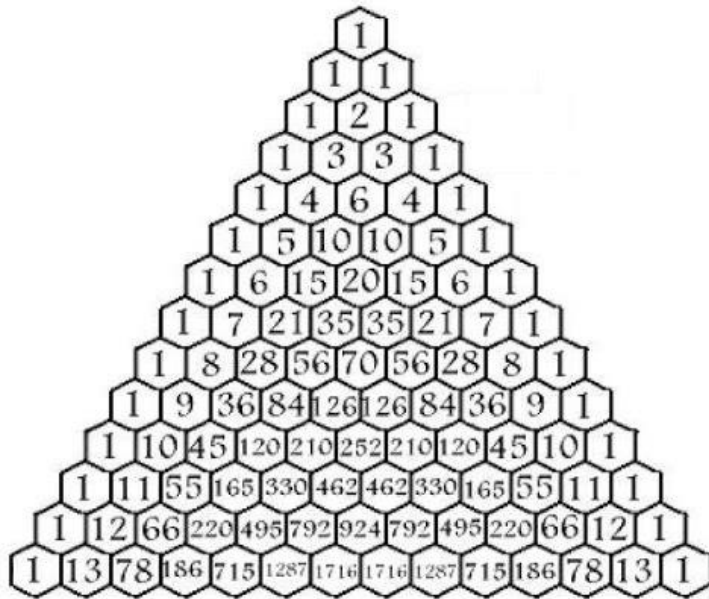


試著利用正方形色紙摺出最大的黃金矩形，將作品貼在下方，並證明所得矩形為黃金矩形

如何以 A4 紙張摺出最大的黃金矩形？畫出摺線並將成品貼於下方

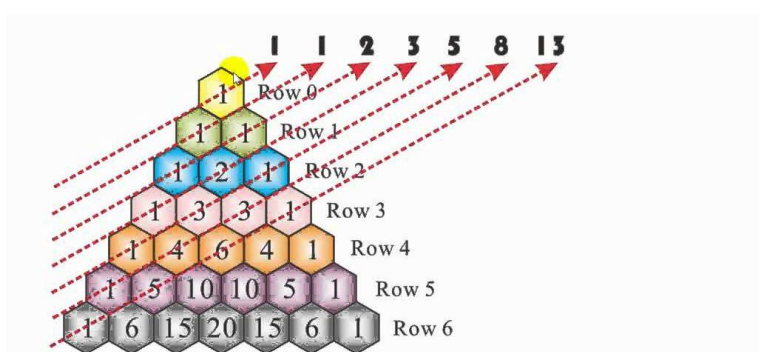
單元3 巴斯卡三角形

巴斯卡三角形



最常應用在乘法公式

單元 3-1 費氏數列與巴斯卡三角形



你發現了甚麼?

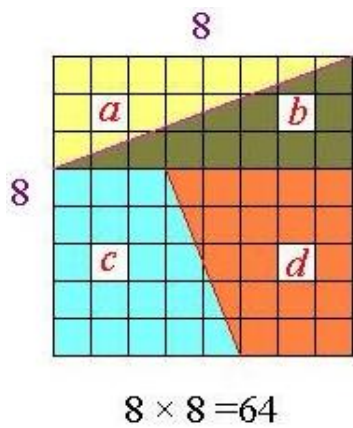
單元 4 數論中的費氏數

(1)觀察費氏數列中的數學 PATTEN

1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、87……

除了最知名的「前兩項之和=第三項」，觀察數列中的數字後，你還能發現它們有甚麼特殊規則嗎？

(3) 利用方格紙作如下切割，接著請試著拼湊出長方形

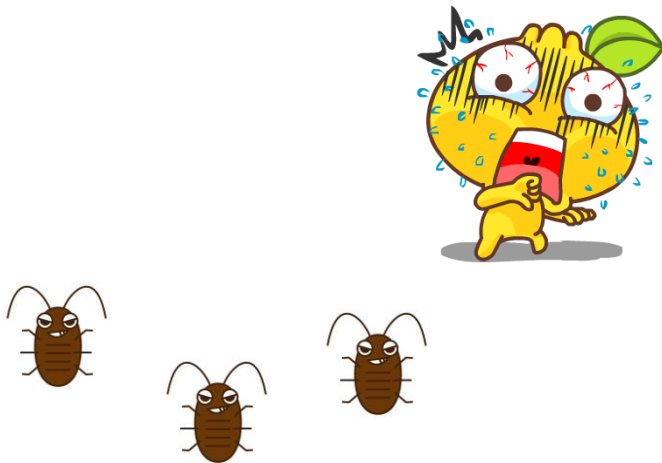


(4)你發現了甚麼？

費盡心機- 費波納契數列

任課教師:莊馥毓、蕭任嫻
指導老師:游森棚教授
授課日期:2021/4/29

一件驚嚇的事



兔子繁殖命題

假設有一對一公一母的幼兔，二個月可以長為成兔。
之後每個月都可以繁殖產下另一對一公一母的幼兔。
每對新產下幼兔經歷相同的兩個月成長過程後，
每個月再繁殖生下一對幼兔。
假設所有的兔子都會存活，
經歷如此生生不息的繁殖，
一年後兔子的數量有多少對？

請在學習單上寫下你的思路及推論



一個奇妙的數列

將每個月的兔子對數寫下--

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144.....

你可以發現數列中的關係嗎？



費氏數列

上述數列繼續寫下去，得到的數列便稱為費波那契數列

則此數列之表示式可為 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,其中 $n \geq 3$

以函數方式表示式則為 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$,其中 $n \geq 3$

此種函數寫法，我們稱之為遞迴函數



費波納契是誰？

費波那契是義大利數學家(約1170~1250)出生於比薩
由於父親在北非做生意，因此學會數學和阿拉伯數字系統。
也因此啟發了費波納契。

長大後的費波納契深感當時歐洲利用羅馬數字運算的不方便
故在他的引介下歐洲開始使用阿拉伯數字
進行商業簿記、度量衡轉換、利率計算等非常實用的應用
為日後的歐洲的銀行和會計發展奠定了基礎。



費波納契是誰？

在1202年，出版了他的「算數之書」。他在書中提出了先前提到的兔子繁殖問題引出了費波那契數列這個美妙的關係式。

而他也自此名垂千古--

我們可在數學應用和程式演算法中發現他的名字，有專門討論費氏數列的季刊，有同名的搖滾樂團，甚至有人以他的名字命名了一顆小行星（6765費波那契）。



那阿拉伯數字是誰創造的呢？為何叫做阿拉伯數字？

生活中的費氏數

等一下出去踏察，我要看甚麼？

- 1、葉序：葉子在莖上著生的順序，稱為葉序。若是把最底下的葉子當作 0 號，那麼往上陸續編成 1 號、2 號、3 號，編到第 3 號的時候，第 3 號的葉子剛好和第 0 號是同一個位置角度，也就是 3 片葉子沿著莖繞了 1 圈，我們將其記作 $\frac{1}{3}$ （可以想成：繞 1 圈要 3 片葉子）。
- 2、花瓣數，或者其他需要注意的地方
- 3、帶著紙筆，仔細觀察並記錄

生活中的費氏數



葉序與角度

1.植物的生長看起來非常隨性，它們的葉子似乎是肆意生長的。如果仔細觀察，你或許會注意到竹筍的對稱、多肉植物的美妙的螺旋形，自然界似乎有著某些規則的模式。

2.今天我們主要說明
互生葉序的關係喔!



1101葉序_互生



1102葉序_對生



1103葉序_輪生



1104葉序_叢生

生活中的費氏數-有一顆鳳梨

下圖為不同角度拍攝同一顆鳳梨，然後拼貼在一起，來觀察螺線數



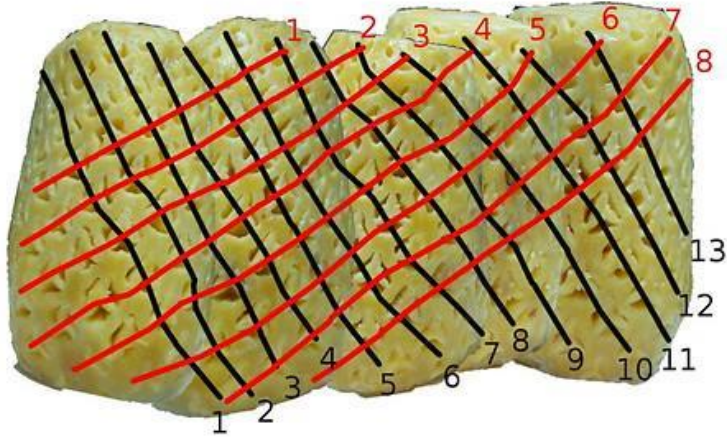
找找費氏數

利用準備的膠帶，順著鳳梨的螺旋方向貼合，

順時針跟逆時針都貼貼看，你發現了甚麼？



生活中的費氏數



生活中的費氏數-向日葵螺線

右圖為向日葵的近照

可以數數看它所呈現的螺線數喔!



生活中的費氏數-向日葵螺線



編號 4



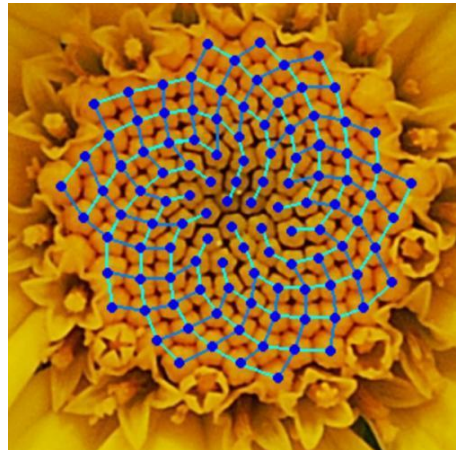
順時針螺旋線數 21 條



逆時針螺旋線數 13 條



逆時針螺旋線數 34 條



具有13條順時針旋轉和
21條逆時針旋轉的螺旋

花瓣數

1



海芋

2



麒麟花

3



延齡草

5



櫻花

8



血根草

13



金花菊

21



雛菊

34



向日葵

還有其他的~



生活中的費氏數-有趣的費氏鐘

這是一個有趣的鐘

你能知道它如何運作嗎



費氏鐘

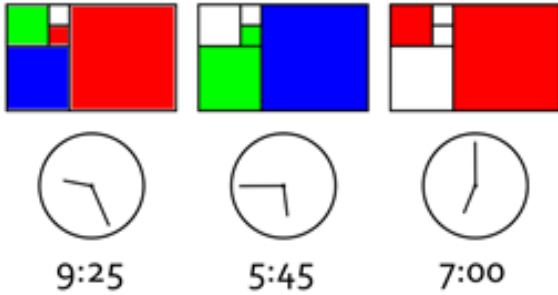
費波那契時鐘，是個十分迷人的設計時鐘。

時鐘既美麗又有趣，使用著名的費氏數列，以全新的方式顯示時間



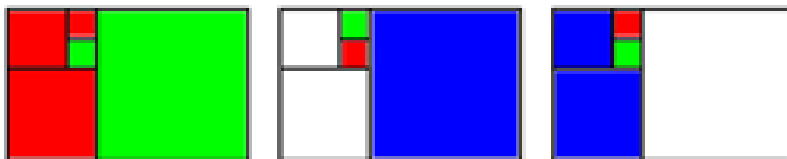
費氏鐘

你可以由以下的圖示猜測出這個鐘的使用方式嗎？



費氏鐘

你可以知道以下三種鐘面各是表示甚麼時刻嗎？



延伸思考

- 1.若小兔子改為2個月才性成熟，
這樣的生長情形會延伸出甚麼有趣的數列規則嗎？
- 2.植物的枝葉生長分布，有些恰巧與費氏數有關，你能推測為甚麼嗎？
- 3.除了上述的表示方式費氏鐘有幾種方法可以表示為6:30？
你可以找出鐘面表示的規則嗎？

黃金比例

「黃金比例 (the golden ratio)」又叫「黃金分割律」，是數學上的經典議題。
《幾何原本》中對黃金比例做了以下的定義：

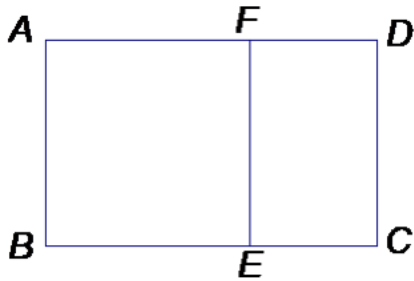
「若將一線段分割成長短兩段，且長段與短段的比，恰好等於全長與長段的比。
則稱此種分割稱為 黃金分割」



經過計算 我們可以得到黃金比例為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，近似值約為1.618

黃金矩形

定義:矩形 $ABCD$ 中，截去一個最大的正方形 $ABEF$ 後，剩下的矩形 $CDFE$ 跟原矩形的長寬比相同。我們就說這樣的矩形為黃金矩形。試求出原矩形 $ABCD$ 的長：寬的比值？(假設 $AB=1$ ，則 $AD=?$)



人體的黃金比例

我們來找找組員中是否存在黃金比例人:

(1)找出一位模特兒

(2)量出以下尺碼

身高	腕骨高
腕骨高	膝蓋高
手臂長	手肘長

並完成學習單上的指示

你發現了甚麼?



費氏數與黃金比例

請將費氏數依序將後項除以前項：
我們可以得到：



巴斯卡三角形與費氏數

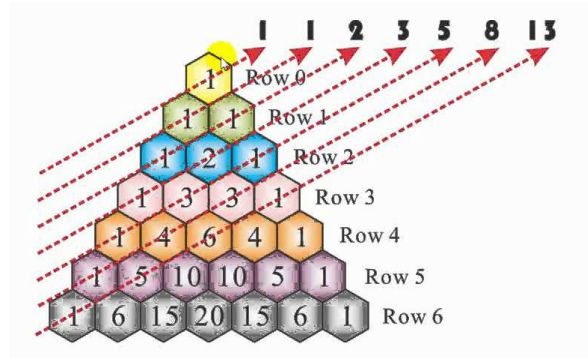
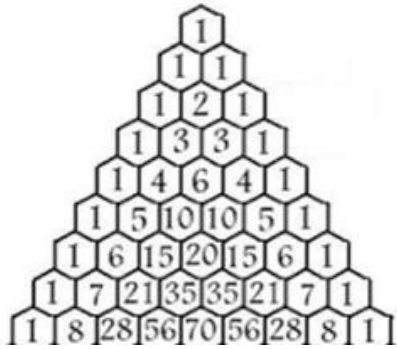
巴斯卡三角形

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & 2 & & 1 & & \\ & & 1 & 3 & 3 & & 1 & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & & 1 & & \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

和的n次方展開式

$$\begin{array}{l} (a+b)^0 = 1 \\ (a+b)^1 = a+b \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ \vdots \end{array}$$

巴斯卡三角形與費氏數



費氏數中的規律(PATTERN)

費氏數中的前幾個數

1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、78.....

你是否可以用一些函數或四則、平方關係來連結這些數字的關係?

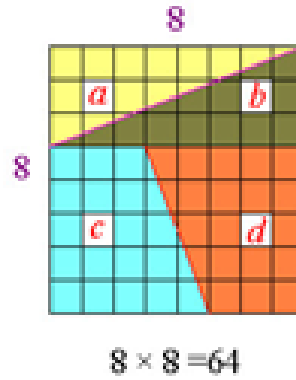
EX: $1+1=2$ 、 $1+2=3$、 $34+55=78$

試著在學習單上試探，亦可以與同學討論喔~

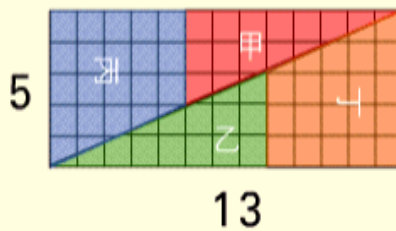
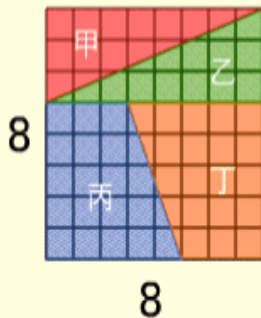
費氏數中的規律(PATTERN)

拿到一張方格紙，
請按照如下圖形進行繪製

<http://letitbe.ncue.edu.tw/ibl/mathq/6465.htm>



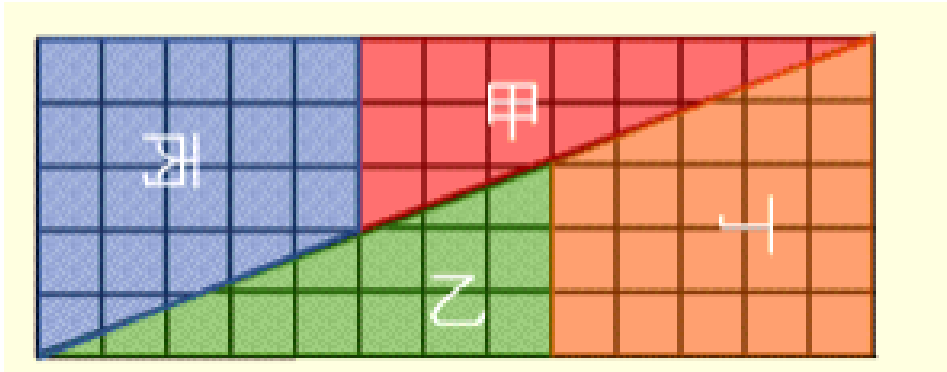
費氏數中的規律(PATTERN)



為何 $64=65$?
中間的1差在哪裡呢?
有沒有方法可以找出或驗證?

費氏數中的規律(PATTERN)

用行列式算算看吧!!



關於費氏數的幾項思考

- 1、方格切割中怎樣的切割比會讓中間的空格最小?
- 2、費氏數列何時為5的倍數?並推論
- 3、費氏數列中，第N項除以5的餘數($f(x) \equiv ? \pmod{5}$)
- 4、n位數中，存在1&0的排列組合，位數中任兩個相鄰位數不同為0
試求n=1、2、3、4、5.....的情形各有多少種?
- 5、你還發現了甚麼?

參考影片

<https://www.youtube.com/watch?v=bQZPj5UnYTY>數學家的故事 ~ 費波那契 Fibonacci

<https://www.youtube.com/watch?v=sArc9p8Xlxg>文化櫥窗-費氏數列

<https://www.youtube.com/watch?v=SjSHVDfXHQ4>斐波那契數字的魔力| 亞瑟·本傑明 (Arthur Benjamin)

<https://www.youtube.com/watch?v=nt2OIMAJj6o>自然界中的斐波那契數列

<https://www.youtube.com/watch?v=-Xus1560xI0>Fibonacci Clock Kickstarter Promotional video

參考資料

<https://web.ntnu.edu.tw/~499412058/series/history.html>費氏數列的由來

<https://reurl.cc/ygVWYa>Scratch & Math

<https://kknews.cc/zh-tw/history/o939vy6.html>費波納契生平

<https://tw.voicetube.com/v3/videos/77040>費氏數列·自然界的密碼

<https://www.taiwannews.com.tw/ch/news/3487309>費氏數列與黃金比例

<https://wywu.pixnet.net/blog/post/26512033>費氏數

http://history.math.fcu.edu.tw/html/chap4/4_1.html

<https://kknews.cc/zh-tw/history/xlqx659.html>將十進位引入歐洲的數學家

http://episte.math.ntu.edu.tw/people/p_fibonacci/index.html李奧納多費波納契

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0%E5%88%97>費氏數列

參考資料

http://a-chien.blogspot.com/2008/12/blog-post_576.html向日葵的數學遊戲

http://a-chien.blogspot.com/2008/12/blog-post_05.html鳳梨的數學遊戲

<https://www.youtube.com/watch?v=YIN95L4BdLk>製作費氏鐘

<https://www.youtube.com/watch?v=WZGoF8mWsPU>組裝費氏鐘

<https://kknews.cc/home/vlnkbbl.html>一種獨特的排列·蘊藏著大自然的數學之美

<https://kknews.cc/science/oorm29m.html>斐波那契數列——數學中的一顆璀璨明珠

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/49/pdf/030409.pdf>

第 49 屆中小學科學展覽會:費伯那西? 盧卡斯? 向日葵到底愛誰?

<https://images.app.goo.gl/qhMiviE15Gy9fA2Z8>