

## 國中獨立研究課程 — 融入式教案

### 帕斯卡三角形的認識與應用

#### 一、課程簡介

<p>給使用者的話</p>	<p>如:設計理念、課程類型(融入之領域科目、特殊需求領域或議題).....等。</p> <p>本課成為特殊需求領域的獨立研究融入數學學科之模組，課程內容為介紹帕斯卡三角形的定義、性質及應用，適用對象為國中八上的學生，活動時間五節課。第一節課為讓學生從多項式乘法的展開式中觀察規律，並提供多項式乘法的不同觀點，進而引導學生理解帕斯卡三角形的定義；第二節課主要為證明第一節課觀察的結果，一開始引導學生從已寫出的例子中說明，接著學生需嘗試使用符號證明展開式係數呈現的關係；第三節課請學生觀察帕斯卡三角形中數字的不同性質，一開始讓學生自行觀察，而後教師利用帕斯卡三角形中前排和後排相加的關係，引導學生證明觀察到的性質；第四節課為帕斯卡三角形的相關應用—請學生討論將正整數拆成 <math>n</math>-parts 的方法，並對一般式做臆測；第五節課為引導學生證明第四節的臆測結果。</p> <p>本課程的設計理念是希望學生學習從問題中觀察數字的 pattern，用數學語言寫下規則，並能嘗試說明原由。藉由教師引導和同儕討論的過程中，學生能培養問題探究與獨立思考的能力，且能夠利用邏輯理性表達自己的想法。</p>
<p>單元架構</p>	<p>註:依照欲融入的學科課程內容擬定架構表。(請圖示並置中)</p> <pre> graph LR     A[帕斯卡三角形的認識與應用] --- B[帕斯卡三角形的介紹]     A --- C[帕斯卡三角形的性質]     A --- D[帕斯卡三角形的應用]     B --- B1[第1節：二項展開式的關係探索]     B --- B2[第2節：二項展開式的關係證明]     C --- C1[第3節：性質探索與證明]     D --- D1[第4節：正整數拆成 n-parts 的方法數探索]     D --- D2[第5節：正整數拆成 n-parts 的方法證明]     </pre> <p><b>第1節：二項展開式的關係探索</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 多項式乘法運算的不同觀點</li> <li>● <math>(x+1)^n</math> 的展開運算</li> <li>● 使用表格探索 <math>(x+1)^n</math> 的關係</li> <li>● 帕斯卡三角形的定義介紹</li> </ul> <p><b>第2節：二項展開式的關係證明</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 利用例子說明 <math>(x+1)^n</math> 的關係</li> <li>● 證明 <math>(x+1)^n</math> 的關係</li> </ul> <p><b>第3節：性質探索與證明</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 小組討論、觀察與說明三角形規律</li> <li>● 證明：每一列的數字規律 第2、3、4斜列的數字規律 聖誕襪定理</li> </ul> <p><b>第4節：正整數拆成 <math>n</math>-parts 的方法數探索</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 理解題意</li> <li>● 從實際數字做試驗與列舉</li> <li>● 系統化整理列式，並對一般化情形臆測</li> </ul> <p><b>第5節：正整數拆成 <math>n</math>-parts 的方法證明</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 證明一般情形的猜想</li> <li>● 透過同儕討論修正想法臆測與證明的想法</li> <li>● 針對單一問題提出不同的解釋方式</li> </ul>

<b>教材特色 與分析</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本課設計是由基本學習內容「乘法公式」單元的延伸課程。學生透過不同的乘法運算觀點，先計算 <math>(x+1)^n</math>，再從展開式中觀察與理解各項係數與帕斯卡三角形之間的關係，並為高中二項式定理以及排列組合作鋪路。</li> <li>2. 課程活動著重在學生理解問題，並能根據問題做試驗、觀察、並解釋。除了用數字及觀察現象作解釋外，更期望學生能以數學語言寫下其想法。</li> <li>3. 在解決正整數拆分問題時，可以讓學生發想以不同角度、論點去切入問題，並且透過驗證與事實解釋得合理性，進行批判論點或判斷驗證的正確性，並提出假設、結論或解決問題的方案。</li> <li>4. 課程中教師主要為引導者，課程進行著重學生自主行的討論及發想，透過同儕之間的討論，學生能夠自己導出數學原理，教師可看學生討論方向適當地給予提示。</li> <li>5. 除帕斯卡三角形的基本規則外，也讓學生延伸探究相關的應用問題及其他隱藏在三角形中的規律。</li> </ol>
---------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------








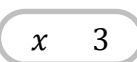
## 二、課程計畫

<b>單元名稱</b>	帕斯卡三角形的認識與應用		
<b>適用對象</b>	<input type="checkbox"/> 七年級 <input checked="" type="checkbox"/> 八年級 <input type="checkbox"/> 九年級	<b>設計者</b>	大成國中 陳怡君老師 同德國中 鄧智升老師 同德國中 王廷豪老師
<b>活動時間</b>	5 節 (每節 45 分, 共 225 分)	<b>設計期間</b>	111.11~112.04
<b>核心素養</b>	<p>編碼說明— 1.例：「創-E-A2」可分為三碼，第一碼「創」為創造力課綱縮寫、第二碼「E」為國民小學階段、第三碼「A2」為核心素養九個面向的A2素養。(詳見創造力課綱頁3-5) 2. <b>至多挑選3項</b>核心素養填入即可。</p> <p><b>數學</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 數-J-C2 樂於與他人良好互動與溝通以解決問題，並欣賞問題的多元解法。</li> <li>2. 數-J-A1 對於學習數學有信心和正向態度，能使用適當的數學語言進行溝通，並能將所學應用於日常生活中。</li> </ol> <p><b>特獨</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 特獨-J-B1 <b>能分析歸納、製作圖表，整理蒐集之資訊或數據</b>，並彈性選用適切形式或嘗試使用新媒體形式，表達獨立研究之過程、發現或成果、價值和限制。</li> <li>2. 特獨-J-C2 透過獨立研究小組學習，發展與<b>同儕溝通、共同參與、執行及討論的能力</b>，能接納不同意見，具備與人和諧互動技巧。</li> </ol>		
<b>學習表現</b>	<p>編碼說明— 1.例：「1a-IV-2」可分為三碼，第一碼「1a」的「1」代表四個主題軸的第1個；「a」代表14個次項目代碼、第二碼「IV」代表第四學習階段、第三碼為流水號。(詳見創造力課綱頁7-14) 2. <b>至多挑選5項</b>符應單元之學習表現填入。      3. 依照融入科目，找尋<b>對應之普教課綱學習表現</b>，貼入幾項即可。</p> <p><b>數學</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. n-IV-7 辨識數列的規律性，以數學符號表徵生活中的數量關係與規律，<b>認識等差數列與等比數列，並能依首項與公差或公比計算其他各項。認識帕斯卡三角形的規律與性質，並能應用於其他問題。</b></li> <li>2. a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。</li> <li>3. a-IV-5 <b>認識多項式及相關名詞，並熟練多項式的四則運算及運用乘法公式，學習直式、橫式以外的多項式計算方法。</b></li> </ol> <p><b>特獨</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 特獨1b-IV-2 主動與同儕合作完成小組獨立研究活動內容並達成目標。</li> <li>2. 特獨2a-IV-1 選用適當的研究方法及程序，<b>利用數字個數或加號個數等適當的方式切入問題核心</b>，並運用於獨立研究中。</li> </ol>		

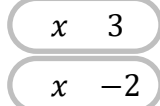
<p>說明—依照融入科目，找尋對應之普教課綱學習內容，貼入幾項即可。</p> <p><b>數學</b></p> <p><b>學習內容</b></p> <p>1. N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性（包括圖形的規律性），以及特殊規律的數列費式數列、三角形數、四面體數，並以符號表示其規律性。</p> <p>2. A-8-3 多項式的四則運算：<del>直式、橫式的多項式加法與減法；直式的多項式乘法（乘積最高至二次）；被除式為二次之多項式的除法運算。</del>熟練高次多項式的乘法運算，並理解及應用多項式乘法的不同觀點進行運算。</p> <p>1. S-9-11 證明的意義：<del>幾何推理（須說明所依據的幾何性質）</del>；代數推理（須說明所依據的代數性質）。</p> <p><b>特獨</b></p> <p>1. 特獨B-IV-1 批判思考能力訓練。</p>										
<p><b>單元目標</b></p>	<p><b>巴斯卡三角形的引入：第一節、第二節課程</b></p> <p>1. 使用不同的方法（分配律、直式、排列組合的想法）展開並化簡 <math>(x+1)^n</math></p> <p>2. 利用表格整理，以理解並說明 <math>(x+1)^n</math> 與巴斯卡三角形的關係，並能用符號改寫表示及說明一般化的情形。</p> <p>3. 理解並用符號表示巴斯卡三角形的定義。</p> <p><b>巴斯卡三角形的性質：第三節</b></p> <p>1. 能透過小組討論、觀察巴斯卡三角形中數字之間除了巴斯卡定理外的其他規律。</p> <p>2. 能利用巴斯卡定理來解釋巴斯卡三角形中的性質—</p> <p>(1) 每列總和為 <math>2^{n-1}</math>、每列為 <math>11^{n-1}</math> 的數值。</p> <p>(2) 三角形數、四面體數、聖誕襪定理。</p> <p><b>巴斯卡三角形的應用：第四節、第五節</b></p> <p>1. 能試驗且有系統地歸納出不同正整數拆分的方法數。</p> <p>2. 能根據試驗的結果，提出一般式的猜想。</p> <p>3. 了解及解釋其正整數拆分的方法數與巴斯卡三角形數字間的關係。</p> <p>4. 能利用不同的方法解釋結果。</p> <p>5. 利用小組討論與發表，修正對問題結果的描述與形成原因。</p>									
<p><b>區分性教學之調整</b></p>	<p>(學習內容、學習歷程、學習環境、學習成果(評量)調整...等，可另增加起點能力評量等欄位)</p> <table border="1" data-bbox="308 1346 1441 2128"> <thead> <tr> <th colspan="3">區分性課程調整</th> </tr> <tr> <th>組別(約2~3組)</th> <th>高能力組</th> <th>低能力組</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>內容</td> <td>           第一、二節課            1. 能用不同的方式展開多項式，並觀察規律。            2. 能用符號表示巴斯卡三角形及多項式係數的一般項，並以將其關係寫成數學式子。            3. 以符號證明二項式係數的規律的成因。            第三節課            4. 至少寫出巴斯卡三角形規律參考答案中的第A、B、C、D、G、F、K項。            5. 能用符號表示並證明巴斯卡定理的不同規律。         </td> <td>           第一、二節課            1. 擇一種方式展開多項式，並觀察其中規律。            2. 使用符號表示巴斯卡三角形各項及多項式的係數，            3. 能用已展開的例子說明二項式係數規律的成因。            第三節課            4. 至少寫出巴斯卡三角形規律參考答案中的第A、B、C、F項。            5. 能用數字表示並證明巴斯卡定理的不同規律，並在老師引導下嘗試以符號書寫。         </td> </tr> </tbody> </table>	區分性課程調整			組別(約2~3組)	高能力組	低能力組	內容	第一、二節課 1. 能用不同的方式展開多項式，並觀察規律。 2. 能用符號表示巴斯卡三角形及多項式係數的一般項，並以將其關係寫成數學式子。 3. 以符號證明二項式係數的規律的成因。 第三節課 4. 至少寫出巴斯卡三角形規律參考答案中的第A、B、C、D、G、F、K項。 5. 能用符號表示並證明巴斯卡定理的不同規律。	第一、二節課 1. 擇一種方式展開多項式，並觀察其中規律。 2. 使用符號表示巴斯卡三角形各項及多項式的係數， 3. 能用已展開的例子說明二項式係數規律的成因。 第三節課 4. 至少寫出巴斯卡三角形規律參考答案中的第A、B、C、F項。 5. 能用數字表示並證明巴斯卡定理的不同規律，並在老師引導下嘗試以符號書寫。
區分性課程調整										
組別(約2~3組)	高能力組	低能力組								
內容	第一、二節課 1. 能用不同的方式展開多項式，並觀察規律。 2. 能用符號表示巴斯卡三角形及多項式係數的一般項，並以將其關係寫成數學式子。 3. 以符號證明二項式係數的規律的成因。 第三節課 4. 至少寫出巴斯卡三角形規律參考答案中的第A、B、C、D、G、F、K項。 5. 能用符號表示並證明巴斯卡定理的不同規律。	第一、二節課 1. 擇一種方式展開多項式，並觀察其中規律。 2. 使用符號表示巴斯卡三角形各項及多項式的係數， 3. 能用已展開的例子說明二項式係數規律的成因。 第三節課 4. 至少寫出巴斯卡三角形規律參考答案中的第A、B、C、F項。 5. 能用數字表示並證明巴斯卡定理的不同規律，並在老師引導下嘗試以符號書寫。								

		<p>第四、五節課</p> <p>6. 除找出方法數的規律外，鼓勵學生也從拆解的方法找規律（系統化列舉）。</p> <p>7. 使用兩種以上的方式證明。</p>	<p>第四、五節課</p> <p>6. 一開始觀察規律時，只需注意最終方法數數字的規律。</p> <p>7. 使用一種方式證明。</p>
	過程	<p>1. 觀察展開式的規律時，可直接針對其展開式子進行觀察。</p> <p>2. 學生可以自我歸納整理出數列的規律性。</p>	<p>1. 觀察展開式的規律時，需請學生將係數獨立寫出，以便觀察。</p> <p>2. 學生需要教師引導才能歸納整理出數列的規律性。</p>
	成果	<p>1. 說明與證明時，要求學生用一般化形式說明。</p> <p>2. 學生可以口頭發表、說明，並統整課程中所歸納的成果。</p>	<p>1. 說明與證明時，可接受學生用數字的例子說明。</p> <p>2. 學生理解課程中所歸納的成果，並記錄。</p>
參考資料	<p>1. 科學Online 巴斯卡三角形 I <a href="https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=39069">https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=39069</a></p> <p>2. 科學Online 巴斯卡三角形的應用 II <a href="https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=39091">https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=39091</a></p> <p>3. 桃園中等學校資賦優異課程工作坊2022年11月2日課程講義</p> <p>4. <a href="https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d322/32206.pdf">https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d322/32206.pdf</a></p>		
教學資源	課程投影片、學習單		

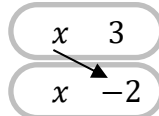
### 三、各單元教學活動

第一節教學活動	時間	評量	備註
<p><b>一、引導活動</b></p> <p><b>活動一：多項式乘法的複習</b></p> <p>1. 請學生做式子的化簡</p> <p>(1) <math>(x+3)(x-2)</math></p> <p>a. 教師詢問展開後的答案（學生應該可以馬上回答）：</p> <p><math>x^2 + x - 6</math></p> <p>b. 請學生說明詳細的乘法運算（學生可以用橫式或直式說明）：</p> <p><math>(x+3)(x-2) = x^2 + 3x - 2x - 6</math></p> <p><b>二、發展活動</b></p> <p><b>活動二：多項式乘法的新觀點（取球的想法）</b></p> <p>1. 教師從活動一 1. (1) b. 的展開式說明乘法的不同觀點：</p> <p>在多項式的乘法中，每一個括號可以視為一種袋子，每個袋子中有兩個球——一個球上面標示數字及符號。多項式的乘法可以看做從不同的 2 袋子中任取一球，再把球上標示的數字及符號相乘，最後再做合併計算。</p> <p>教學寫法先將  表示為一個袋子。</p> <p>如計算 <math>(x+3)(x-2)</math> 時，總共有兩袋，一袋裝有兩球 、；另一袋裝有兩球 、。</p> <p>接著如同直式的寫法，將裝有裝有兩球 、 的袋子 </p>	<p>一、</p> <p><b>活動一</b></p> <p>1. 2分</p> <p>(2)</p> <p>二、</p> <p><b>活動二</b></p> <p>1. 20分</p> <p>(22)</p>	<p>一、</p> <p><b>活動一</b></p> <p>口頭發表、學習單</p> <p>二、</p> <p><b>活動二</b></p> <p>口頭發表、學習單、觀察記錄</p>	<p>PPT P2.</p> <p>一、</p> <p><b>活動一</b></p> <p>學習單 P1.、PPT P3.</p> <p>二、</p> <p><b>活動二</b></p> <p>學習單 P1.~P2.、PPT P4.~P9.</p>

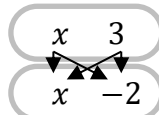
寫上排，裝有裝有兩球  $x$ 、 $-2$  的袋子  $x - 2$  寫下排，如下：



每一次相乘（分配）就是要從每個袋子中取一個球，並將球上元素相乘，如上面取  $x$ ，下面取  $-2$ ，得  $-2x$ 。



因此全部總共有 4 種分配方式，乘完後有 4 個項：  
 $x^2$ 、 $-2x$ 、 $3x$ 、 $-6$ 。



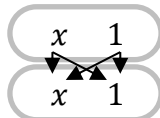
但若細看每一項，根據符號和數字的取法，可以分成三個種類：

取法	方法數	形成的項
上下排都取 $x$	1種： $x \cdot x$	$x^2$
一排取 $x$ ，一排取數字	2種： $3 \cdot x$ 及 $x \cdot (-2)$	$x$
上下排都取數字	1種： $3 \cdot (-2)$	常數項

2. 利用不同觀點說明  $(x+1)^2$ 、 $(x+1)^3$  的展開方式

(1) 請學生展開  $(x+1)^2$

- 教師詢問展開後的答案（學生應該可以馬上回答）：  
 $x^2 + 2x + 1$
- 教師可以請學生用新的方法解釋，帶學生看出係數就是形成每一項的方法數



共有 4 種取法，分成 3 類

取法	方法數	形成的項
上下排都取 $x$	1種： $x \cdot x$	$x^2$ 合併 $x^2$
一排取 $x$ ，一排取數字	2種： $1 \cdot x$ 及 $x \cdot 1$	$x$ 合併 $2x$
上下排都取數字	1種： $1 \cdot 1$	常數項 合併 $1$

(2) 請學生展開  $(x+1)^3$

- 請學生展開  $(x+1)^3$ ，可以自由讓學生選擇展開方式

(a) 利用橫式運算

先將  $(x+1)^2$  寫成  $x^2 + 2x + 1$ ，再計算

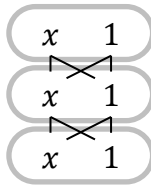
$$\begin{aligned} (x+1)^3 &= (x^2 + 2x + 1)(x+1) \\ &= x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

(b) 利用直式運算

先將  $(x+1)^2$  寫成  $x^2 + 2x + 1$ ，再計算

$$\begin{array}{r} \phantom{x^3} x^2 + 2x + 1 \\ \times \phantom{x^2} x + 1 \\ \hline x^3 + 2x^2 + x \\ \phantom{x^3} + 2x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

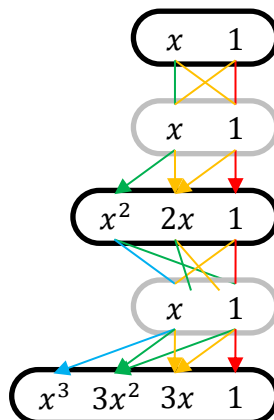
(c) 利用取球的想法進行運算  
寫成



利用實線表示每一次相乘的取法，共有8種方法

取法	方法數	形成的項
三排都取 $x$ 	1種： $x \cdot x \cdot x$	$x^3$ 合併 $3x^3$
兩排取 $x$ ，一排取 $1$ 	3種： $x \cdot x \cdot 1$ $x \cdot 1 \cdot x$ $1 \cdot x \cdot x$	$x^2$ 合併 $3x^2$
一排取 $x$ ，兩排取 $1$ 	3種： $x \cdot 1 \cdot 1$ $1 \cdot x \cdot 1$ $1 \cdot 1 \cdot x$	$x$ 合併 $3x$
三排都取 $1$ 	1種： $1 \cdot 1 \cdot 1$	常數項 合併 $1$

(d) 利用新觀點+直式進行運算—把每一次相乘的結果也放入：  
灰色的集合為未運算的括號，運算時作為乘式；  
黑色的集合為一次運算完的結果，可繼續和灰色的集合相乘。



在此方法中，藍色集合中每一項的係數為取法的方法數。每次進行下一步時，方法數可累加，項細說明建第二節課程內容。

教學指引：

方法(c)是為了讓學生感受到係數為選擇元素相乘的方法數；

方法 (d) 是為了讓學生感受到係數與巴斯卡三角形的關係。

**活動三：從範例中尋找關係**

- 前面學過四種展開  $x + 1$  高次方的方式，教師可以詢問學生
  - 哪一種比較好算？
  - 接下來要展開  $(x + 1)^4$ 、 $(x + 1)^5$ ，你會使用哪一種方法？
- 展開  $(x + 1)^4$ 、 $(x + 1)^5$ ：
  - $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
  - $(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

**活動四：整理式子並觀察不同式子間的關係**

- 請學生將  $(x + 1)^n, n = 1, 2, 3, 4, 5$  的結果作整理，並觀察每一個式子的規律。

- 利用表格做紀錄（符號和係數的要填）：

項 \ 多項式	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	1
$(x + 1)^1$					$x$	1
$(x + 1)^2$				$x^2$	$2x$	1
$(x + 1)^3$			$x^3$	$3x^2$	$3x$	1
$(x + 1)^4$		$x^4$	$4x^3$	$6x^2$	$4x$	1
$(x + 1)^5$	$x^5$	$5x^4$	$10x^3$	$10x^2$	$5x$	1

- 詢問每一列的關係

- 次方規則

$(x + 1)^n$  最高為  $n$  次，總共有  $n + 1$  項。

- 係數規則

只看表格中的係數

項 \ 多項式	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	1
$(x + 1)^1$					1	1
$(x + 1)^2$				1	2 = 1 + 1	1
$(x + 1)^3$			1	3 = 1 + 2	3 = 2 + 1	1
$(x + 1)^4$		1	4 = 3 + 1	6 = 3 + 3	4 = 3 + 1	1
$(x + 1)^5$	1	5 = 1 + 4	10 = 4 + 6	10 = 6 + 4	5 = 4 + 1	1

(a) 每一列左右兩邊都是 1

(b) 且每一列的第  $k$  個數和第  $k + 1$  個數和為下一列的第  $k + 1$  個數

**三、綜合/總結活動**

教師介紹巴斯卡三角形

- 若把各式的係數提出，排成三角形的形狀，稱此數形為巴斯卡三角形，如圖：

**活動三**

10分  
(32)

**活動三**

口頭發表、學習單、觀察記錄

**活動三**

學習單  
P3、  
PPT  
P10.

**活動四**

10分  
(42)

**活動四**

口頭發表、學習單、觀察記錄

**活動四**

學習單  
P3、  
PPT  
P11.

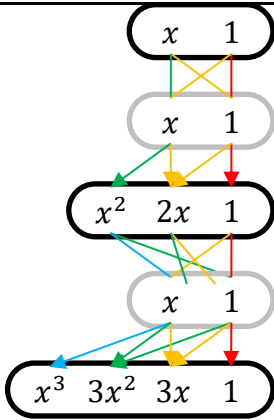
三、  
3分  
(45)

三、  
老師講解，無評量方式

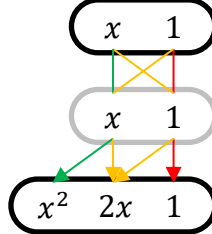
三、  
PPT  
P12.





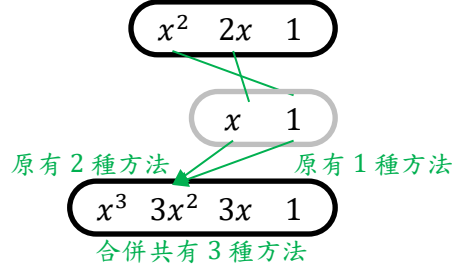


$(x+1)^2 \rightarrow x^2 \quad 2x \quad 1$   
 $x^2$  用綠線表示，有 1 種取法  
 $2x$  用橘線表示，有 2 種取法  
 $1$  用橘線表示，有 1 種取法

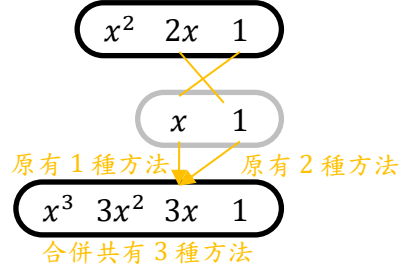


$(x+1)^3 \rightarrow x^3 \quad 3x^2 \quad 3x \quad 1$   
 $x^3$  用藍線表示，有 1 種取法

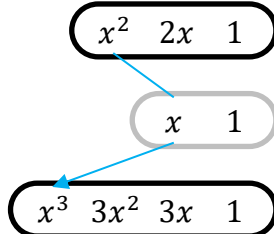
$x^2$  用綠線表示，在第二次運算時有兩種方式，因此有  $1+2$  種取法



$2x$  用橘線表示，在第二次運算時有兩種方式，因此有  $2+1$  種取法



$1$  用橘線表示，有 1 種取法



活動二：用符號證明係數的關係

1. 定義符號

請學生思考  $(x+1)^n$  的係數有兩個變量，要怎麼表示會比較好？  
 最後老師統一定義  $(x+1)^n$  的  $x^n$  的係數符號為  $C_k^n$ ，  
 其中常數項為  $C_0^n = 1$ ， $x^n$  的係數為  $C_n^n = 1$ 。  
 巴斯卡三角形以符號表示：

活動二  
 18分  
 (40)

活動二  
 口頭發表、學習單、

活動二  
 學習單  
 P5.、  
 PPT

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_0^2 & C_1^2 & & & \\
 & & & C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 & \\
 & & & & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \\
 & & & & & C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 \\
 & & & & & & C_0^5 & C_1^5 & C_2^5 & C_3^5 & C_4^5 & C_5^5 \\
 & \cdots & & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & C_0^{n+1} & C_1^{n+1} & \cdots & C_{k-1}^n & C_k^n & \cdots & C_{n-1}^n & C_n^n \\
 & & & & & & & & & & & & & & \blacktriangleup & \blacktriangledown & & & \\
 & & & & & & & & & & C_0^{n+1} & C_1^{n+1} & \cdots & \cdots & C_k^{n+1} & \cdots & \cdots & C_n^{n+1} & C_{n+1}^{n+1}
 \end{array}$$

教學指引：

- 符號的表示法教師可以彈性選用不同的表示方式，或是也可使用學生共同討論的符號。本教案選擇  $C$  做紀錄是為了避免高中二項式定理要重新熟悉符號，但先不講解  $C$  的運算及其代表意義（可以做為高能力組同學的補充資料）。
- 學生初次使用有兩個變量的符號紀錄，可多舉例子讓學生熟悉。

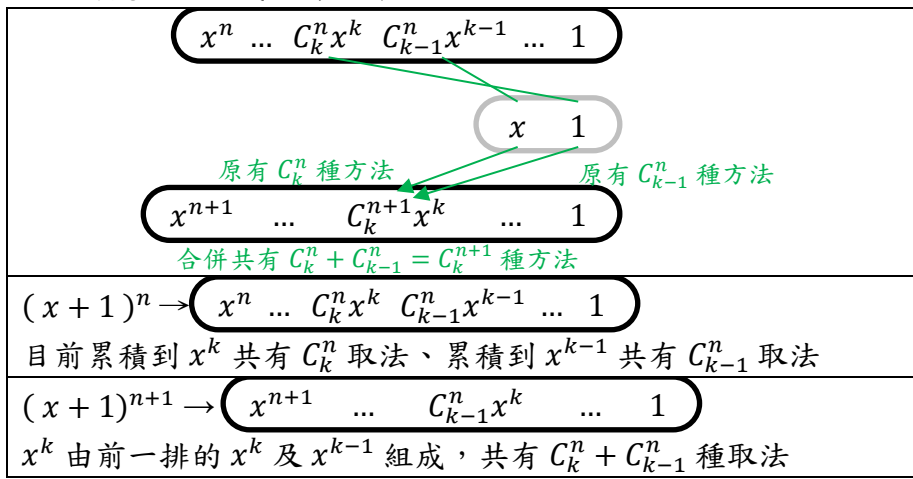
2. 討論證明的書寫

$$\begin{aligned}
 (x+1)^n &= C_n^n x^n + C_{n-1}^n x^{n-1} + \cdots + C_1^n x + C_0^n \\
 (x+1)^{n+1} &= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} + C_n^{n+1} x^n + \cdots + C_1^{n+1} x + C_0^{n+1} \\
 \text{求證：} & C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}
 \end{aligned}$$

(a) 利用橫式運算：

從運算的過程中，可以看出  $n+1$  次展開式和  $n$  次展開式的關係，  
 $(x+1)^{n+1} = (x+1)^n \cdot x + (x+1)^n \cdot 1$   
 $= (C_n^n x^n + \cdots + C_1^n x + 1) \cdot x + (C_n^n x^n + \cdots + C_1^n x + 1)$ ，  
 $x^k$  可以從  $C_{k-1}^n x^{k-1} \cdot x$  及  $C_k^n x^k \cdot 1$  得到，  
 因此  $C_k^{n+1} x^k = C_{k-1}^n x^{k-1} \cdot x + C_k^n x^k \cdot 1 = C_{k-1}^n x^k + C_k^n x^k$ ，  
 意即  $C_k^{n+1} = C_{k-1}^n + C_k^n$ 。

(d) 利用新觀點+直式進行運算



三、綜合/總結活動

教師總結巴斯卡三角形和係數的關係

<p>1. <math>(x+1)^n</math> 展開整理後的係數呈現巴斯卡三角形的關係，其原因在橫式、直式運算，及新的計算方法(d)中都可以看的出來。</p> <p>2. 當掌握規律後，計算 <math>(x+1)^n</math> 更為方便，只要將多項式降冪排列，係數填入巴斯卡三角形的第 <math>n</math> 排數字即可。</p> <p>3. 但若 <math>n</math> 很大時，巴斯卡三角形需要一層一層的推出也變得不方便，所以可以搭配使用前一節課的補充的式子： 巴斯卡三角形的第 <math>n</math> 列的第 <math>k</math> 個數為 <math>\frac{n!}{k!(n-k)!}</math>， 也就是用新符號表示為 <math>C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}</math>。</p> <p>4. 回顧方法(c)+方法(d)，<math>(x+1)^n</math> 的 <math>x^k</math> 項意為在所有括號（袋子）中取 <math>k</math> 個 <math>x</math>，其餘取 <math>1</math> 的方法數。之後高中排列組合會學到取球的方法數就是記為 <math>C_k^n</math>，讀作 <math>Cn</math> 取 <math>k</math>。因此 <math display="block">(x+1)^n = C_n^n x^n + C_{n-1}^n x^{n-1} + \dots + C_1^n x + C_0^n</math> 上面的式子即為二項式定理一種案例。</p> <p>教學指引： 1. 第3點、第4點為教師視情況補充，可以讓學生知道什麼是二項式定理，但不需要學生熟練計算。 2. 二項式定理為求 <math>(x+y)^n</math> 的展開式，為避免兩種符號對學生負擔太大及配合課程內容，此處調整為 <math>y=1</math> 代入的情況。</p>	<p>三、 5分 (45)</p>	<p>三、 老師講解，無評量方式</p>	
<p>第三節教學活動</p>	<p>時間</p>	<p>評量</p>	<p>備註</p>
<p>一、引導活動</p> <p>活動一：列出巴斯卡三角形</p> <p>教師帶學生與巴斯卡三角形並填寫巴斯卡三角形。</p> <p>1. 讓學生依據巴斯卡三角形的規則，列出至少 8 列的巴斯卡三角形</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>答案</p> <pre style="text-align: center; font-family: monospace;"> 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 1 6 15 20 15 6 1 1 7 21 35 35 21 7 1 1 8 28 56 70 56 28 8 1 </pre> </div> <p>活動二：觀察規律並說明</p> <p>1. 從巴斯卡三角形數字當中，除了先前觀察到的規律（上面兩數相加等於下面的數字），你還能從中觀察到其他特殊規律嗎？</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>可能答案：</p> <p>A. 左右對稱</p> <p>B. 最左邊與最右邊都是 1</p> <p>C. 左右第二斜列是 1、2、3、4 (等差數列)</p> <p>D. 左右第三斜列是三角形數 (1、3、6、10、15、...)</p> <p>E. 左右第四斜列是四面體數 (1、4、6、10、20、...)</p> </div>	<p>一、 活動一 3分 (3)</p> <p>活動二 15分 (18)</p>	<p>一、 活動一 學習單</p> <p>活動二 口頭發表、學習單、觀察記錄</p>	<p>PPT P18. 一、 活動一 學習單 P6、 PPT P19.</p> <p>活動二 學習單 P6、 PPT P20. ~29.</p>



寫至巴斯卡三角形

巴斯卡三角形 第六列為	1	5	10	10	5	1
$11^5$	1	$5+1$ (進位)	$0+1$ (進位)	0	5	1

(3) 試用巴斯卡三角形特性來計算  $11^7 = ?$

答案：

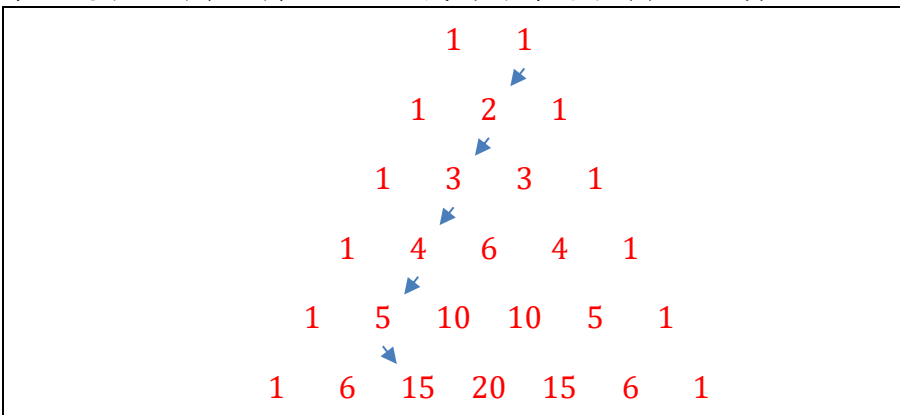
$11^7$  要看巴斯卡三角形第八列

巴斯卡三角形 第八列為	1	7	21	35	35	21	7	1
$11^7$	1	$7+2$	$1+3$	$5+3$	$5+2$	1	7	1
$11^7$	1	9	4	8	7	1	7	1

活動四：解釋規律K

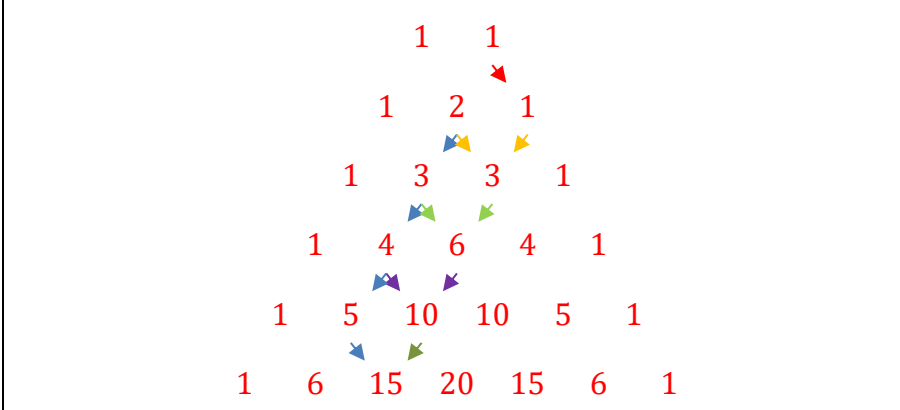
1. 講解聖誕襪定理

(1) 學生觀察巴斯卡三角形的聖誕襪（高爾夫球桿）的性質



(2) 教師提問：如何用巴斯卡定理來解釋聖誕定理  
先讓學生自行思考，提出方法來解釋

答案



活動五：解釋規律C、D、E

1. 引導學生觀察規律C、D、E

教學指引：

教師觀察學生於活動一寫下的規律，視教學時間彈性調整決定是否解釋以下規律。

2. 引導學生解釋規律

C. 左右第二斜列是 1、2、3、4

活動四

10分  
(43)

活動四

口頭發表、學習單、觀察記錄

活動四

學習單  
P7.、  
PPT  
P36.

活動五

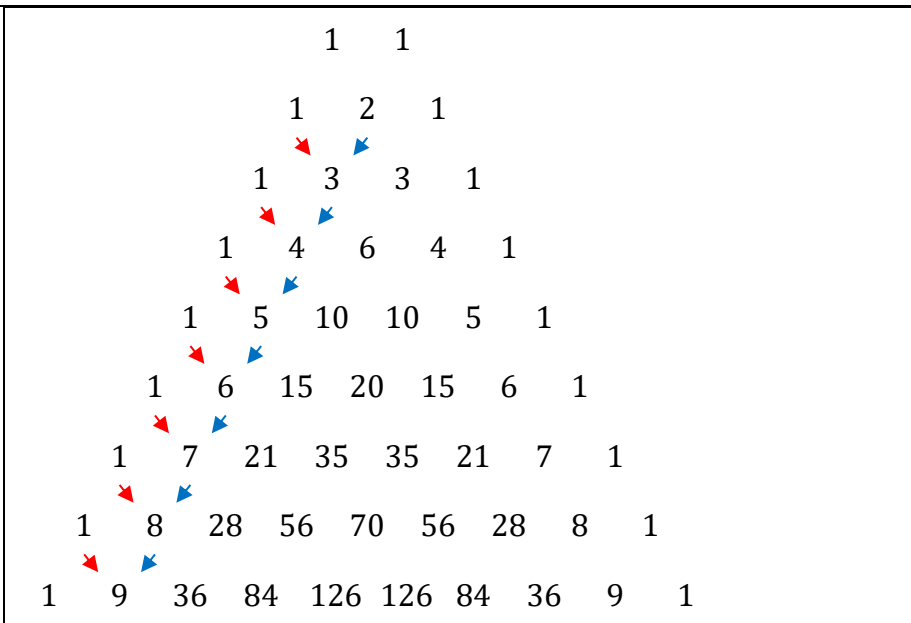
教師試  
時間彈  
性補充

活動五

口頭發表、學習單、觀察記錄

活動五

學習單  
P8.、  
PPT  
P37.  
~39.



請解釋「三角形數」與「四面體數」是什麼？

三角形數：是將圓球排成正三角形所需要的圓球數

四面體數：是將圓球排成正四面體所需要的圓球數

請畫出「三角形數」與「四面體數」每一層增加的球數。

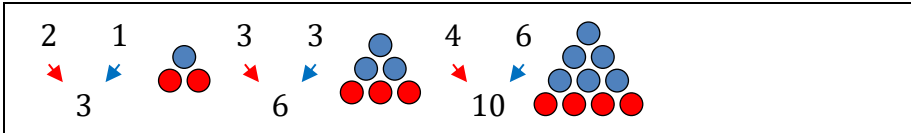
層數	三角形數	圓球數量	四面體數	圓球數量
1		1		1
2		2		3
3		3		6

「三角形數」與「四面體數」的數字關係與巴斯卡三角形中的數字哪部分有關係？為什麼？

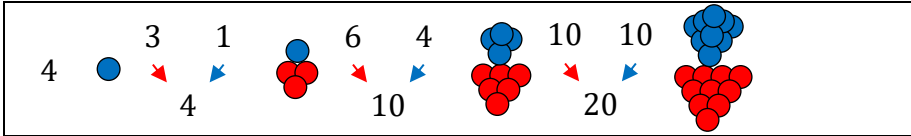
三角形數每一層的數量都是巴斯卡三角形中左右第三斜列的數字

四面體數每一層的數量都是巴斯卡三角形中左右第四斜列的數字

D. 左右第三斜列是三角形數(1、3、6、10、15...)



E. 左右第四斜列是四面體數(1、4、10、20...)



### 三、綜合/總結活動

1. 教師統整學生觀察巴斯卡三角形中的數字規律與性質

- (1) 在二項式展開式中，當  $x$  代入不同數字，巴斯卡三角形各項與  $2^n$ 、 $11^n$  關連與結構。
- (2) 巴斯卡定理中的聖誕襪定理
- (3) 巴斯卡定理的其他規律

三、  
總結  
2分  
(45)

三、  
老師總  
結,無評  
量

第四節教學活動

時間

評量

備註

一、引導活動

簡單回憶何謂巴斯卡三角形，及巴斯卡三角形的架構及性質

二、發展活動

活動一：理解題意

1. 說明課程的目標問題

今天我們來討論一個特別的問題，「對於一個任意的正整數，可以將這個正整數寫成一堆正整數的相加。」

例如 3，則 3 可以寫成  $1 + 1 + 1$  or  $2 + 1$  or  $1 + 2$  共三種方法。

2. 請同學用一些時間討論接下來的問題

試著找出正整數 5 總共有幾種相加的方法？

(1) 視討論狀況請同學上台發表，要請學生講解過程

(2) 教師可引導學生整理出 5 相加的所有的方法數

答案：16

5 相加的方法

堆數	1 堆	2 堆	3 堆	4 堆	5 堆
數字 5	5		$3 + 1 + 1$		
		$1 + 4$	$1 + 3 + 1$	$2 + 1 + 1 + 1$	
		$4 + 1$	$1 + 1 + 3$	$1 + 2 + 1 + 1$	$1 + 1 + 1$
		$2 + 3$	$2 + 2 + 1$	$1 + 1 + 2 + 1$	$+ 1 + 1$
		$3 + 2$	$2 + 1 + 2$	$1 + 1 + 1 + 2$	
		$1 + 2 + 2$			
方法數	1	4	6	4	1

5 有 16 種相加的方法

活動二：尋找規律

1. 試著找出正整數 6 總共有幾種相加的方法的方法數？

(1) 視討論狀況請同學上台發表，要請學生講解過程

(2) 教師可引導學生利用表格整理數字 6，相加堆數由小到大的方法數

答案：32

相加堆數由小到大的方法數：

堆數	1 堆	2 堆	3 堆	4 堆	5 堆	6 堆
數字 6	1	5	10	10	5	1

6 有 32 種相加的方法

活動三：猜測一般式

1. 猜一猜一般的情形為何？

(1) 教師可看同學討論狀況給予協助，可提示同學先列舉幾個較小數字的方法數

(2) 嘗試將這些方法數做分類，從較小數字的方法數到較大數字的方法數，之間是否存在某些關係，請同學觀察看看

(3) 如果有較快想出的學生，可以直接進入問題4；

5分鐘如有沒想法的組別，可以請完成組別的同学上台發表

答案： $n$  有  $2^{n-1}$  種相加的方法

尋找方法：

(1) 先列舉幾個較小數字的方法數

數字	2	3	4	5	6	7
方法數	2	4	8	16	32	64

一、  
3分  
(3)  
二、  
活動一  
8分  
(11)

一、  
口頭發  
表  
二、  
活動一  
口頭發  
表、學  
習單、  
觀察記  
錄

PPT  
P40.  
一、  
PPT  
P41.  
二、  
活動一  
學習單  
P9、  
PPT  
P42.  
~43.

活動二  
15分  
(26)

活動二  
口頭發  
表、學  
習單、  
觀察記  
錄

活動二  
學習單  
P9、  
PPT  
P44.

活動三  
15分  
(41)

活動三  
口頭發  
表、學  
習單、  
觀察記  
錄

活動三  
學習單  
P9、  
PPT  
P45.

(2) 嘗試將這些方法數做分類

2 =	2	1 + 1		
3 =	3	2 + 1 1 + 2	1 + 1 + 1	
4 =	4	3 + 1 1 + 3 2 + 2	2 + 1 + 1 1 + 2 + 1 1 + 1 + 2	1 + 1 + 1 + 1

(3) 從上面兩種可以推得方法數有  $2^{n-1}$  種

### 三、綜合/總結活動

教師依據學生的發現來做最後統整，可以利用表格或其他方法找出一般的情況，但教師要清楚統整一班化情況為  $2^{n-1}$  種，以方便下堂課教學接續討論。

三、  
4分  
(45)

三、  
老師講解，無評量方式

### 第五節教學活動

時間

評量

備註

#### 一、引導活動

回顧上堂課所討論之問題，回顧已做過的討論及一般化情況。

一、  
3分  
(3)

一、  
教師講解

PPT  
P46.  
~47.

#### 二、發展活動

##### 活動一：解釋與證明

1. 請同學試著說明活動三問題的結果，為何會呈現這樣的關係？

二、  
32分  
(35)

二、  
活動一

二、  
活動一  
學習單

(1) 教師可視情況引導學生

I. 引導學生利用表格觀察規律，

堆數	1 堆	2 堆	3 堆	4 堆	5 堆	6 堆	7 堆
數字 2							
數字 3							
數字 4							
數字 5							
數字 6							
數字 7							

口頭發表、學習單、觀察記錄

P10、  
PPT  
P48.

II. 引導學生連結其與巴斯卡三角形的關係

例如：3 的情況數為  $1 + 2 + 1$ 、4 的情況數為  $1 + 3 + 3 + 1$

為何不同數量的組合數，剛好對應巴斯卡三角形？

III. 觀察巴斯卡各列的總和來說明，為何會變成  $2^{n-1}$  結果

堆數 數字	1 堆	2 堆	3 堆	4 堆	5 堆	6 堆	7 堆	總和
2	1	1						$1 + 1$
3	1	2	1					$1 + 2 + 1$
4	1	3	3	1				$1 + 3 + 3 + 1$
5	1	4	6	4	1			$1 + 4 + 6 + 4 + 1$
6	1	5	10	10	5	1		$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$
7	1	6	15	20	15	6	1	$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

不同數量的組合數，剛好對應巴斯卡三角形  
又巴斯卡三角形各列總和等於  $2^{n-1}$



教學指引：

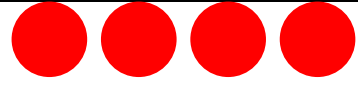
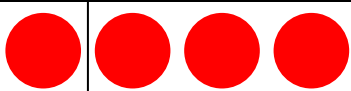
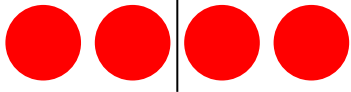

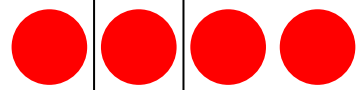
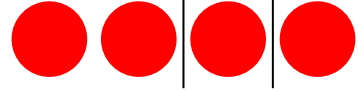
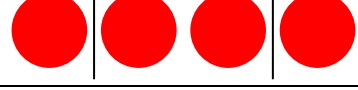
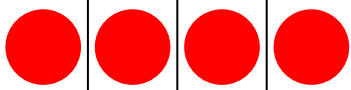
除了方法數為  $2^{n-1}$  外，教師也可以引導學生發現數字  $n$  分解的方法數  $a_n$  會等於  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + 1$

(2) 請學生上台發表-請每組學生上台發表自己的發現

### 活動二：其他證明方法


1. 詢問學生，有沒有更快又更好的方式來說明這漂亮的結果？  
引導學生思考「若將桌上有  $n$  個相同的球分成若干堆（每堆數量可不同），則共有幾種分組方法？」

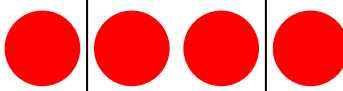
(1) 先想想看如果只有 4 個球，可以怎麼分？試著動手畫畫看！

1 堆 	2 堆   
3 堆   	4 堆 

(2) 那如果  $n$  個球，可以怎麼分？

教師可以引導學生觀察分組的切割方式和數字的加號分隔有對應關係。


分球的方法和把數字拆分的方法相同：「」等於算式中的「+」

如： 對應到算式  $1 + 2 + 1$

故  $n$  個球分組的方法數有  $2^{n-1}$  種

(3) 詢問有沒有更漂亮的解釋方法？（利用排列組合的插空法來說明）

從四個球的情形看，

分組其實就是決定是否要在兩顆球之間畫「」。

4 個球有 3 個空格，因此分法有  $2 \times 2 \times 2 = 2^3$  種

$n$  個球有  $n - 1$  個空格，因此分法有  $2^{n-1}$  種

### 三、綜合/總結活動

教師可依據學生的發現來做最後統整，學生可能會有的發現：

設數字  $n$  分解的方法數  $a_n$

活動二

5分

(40)

活動二

口頭發

表、學

習單、

觀察記

錄

活動二

學習單

P11、

PPT

P49.

~P53.

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 利用表格歸納出各方法數之間的關係，得到 <math>a_n = 2^{n-1}</math></li> <li>2. <math>\langle a_n \rangle</math> 為等比數列</li> <li>3. <math>a_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_{n-1} + 1</math></li> <li>4. 比較巴斯卡三角形每列的數字與數字拆解的方法，得出 <math>a_n = 2^{n-1}</math></li> <li>5. 原題目可以含分組問題做比較，並可利用排列組合方法說明 <math>a_n = 2^{n-1}</math></li> </ol>	<p>三、 5分 (45)</p>	<p>三、 老師講 解，無 評量方 式</p>	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------	-----------------------------------------	--

#### 四、教學省思及建議（如：課程教學、環境佈置…等）（下框若不敷使用，可自行調整。）

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 本堂課著重在學生討論完成任務，藉由學習單與教師的問題引導可以看出學生不斷的修正想法，從單純列數的到使用方法整理歸類，可以看出學生學習思維的成長。</li> <li>2. 教師可以多準備不同的方法，依學生回答彈性調整課程。當學生有不同於教師的預期結果時，教師應先加以鼓勵及肯定，再來討論方法的可行性，可以增進學生願意嘗試的動機。</li> <li>3. 可以讓學生練習將想法記錄下來(盡量用白紙)，可以幫助來釐清頭緒，也幫助後面的發想與討論。教師也可利用口頭詢問的方式，引導學生自己口述出來。</li> <li>4. 當不同組學生討論有不同想法時，可以讓兩組學生都上台講解，互相討論彼此的同質性及異質性，且透過兩組不同的發想與共同討論，能使學生對自己同儕的想法有更深的認識與理解。</li> <li>5. 第四節課討論數的分解時，因學生一開始可能尚未有系統的使用列舉法，因此教師可以觀察學生的作法，強調與提示學生將其寫下的算式做分類，或可從不同拆解法的算式中尋找規則。</li> <li>6. 第五節課討論證明時，可以於討論一段時間後聚焦，要求學生觀察分解方法數與巴斯卡三角形的關係。事後也可從不同的數字分解的過程之中尋找分解方法數的遞迴式，強化學生理解問題與巴斯卡三角形的關聯。</li> </ol>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

#### 五、附件

附件一 課程PPT

附件二 課程學習單

#### ※附件示例說明※

- 1、教材：講義或PPT等。
- 2、補充資料。
- 3、學生學習單。
- 4、教學活動評量。
- 5、學生回饋。
- 6、學生成果：
  - (1)學習單：佳作至少三份掃描電子檔。
  - (2)海報：請拍照並繳交照片。
  - (3)影片：學生口頭發表、實驗實作等課程實錄。全部影片或重要片段。

#### ※注意事項※

- 1、請留意版權：
 

盡量使用自編教材、照片或圖片。若參考使用網路或其他來源之資源，請標註出處。
- 2、請留意學生個資保護：
 

學生學習單資料請遮蔽或請勿呈現其班級、姓名、座號。

# 巴斯卡三角形的認識與應用



大成國中 陳怡君 老師  
同德國中 鄧智升 老師  
同德國中 王廷豪 老師

## 活動一

展開並化簡多項式  $(x+3)(x-2)$

$$(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$$

多項式乘法關係證明  
認識

# 第一節課

## 多項式乘法關係探索


認識  
性質  
應用


## 活動二

多項式乘法的不同計算方式

1. 有兩個袋子，每個袋子裡面有兩種球，一種標註是  $x$ ，另一種標註數字，如右圖。

- 若每個袋子中取一個球，請問有幾種取法？
- 若將取球的情形做分類，你會怎麼分？






共 4 種

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

2. 展開並化簡  $(x+1)^2$

- 從兩個袋子中各取一球，有幾個取法？

共 4 種

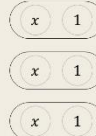

- 請將所有的取球情形做分類。

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

3. 展開並化簡  $(x+1)^3$

- 從三個袋子中各取一球，有幾個取法？



共 8 種

- 請將所有的取球情形做分類。

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

4.  $(x+1)^2 \cdot (x+1)^3$  化簡後的係數與取球方法有什麼關係？

共 4 種                      共 8 種


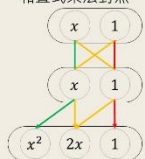
$$(x+1)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$$

$$(x+1)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$$

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

4.  $(x+1)^2$  化簡後的係數與取球方法有什麼關係？


共 4 種

$$(x+1)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$$

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

4.  $(x+1)^3$  化簡後的係數與取球方法有什麼關係？




共 8 種

$$(x+1)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$$

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動三

- 展開並化簡  $(x+1)^4$

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

- 展開並化簡  $(x+1)^5$

$$(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動四

- 將  $(x+1)^n, n=1, 2, 3, 4, 5$  的計算結果依照各項填入表格：

多項式 \ 項	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	1
$(x+1)^1$					$x$	1
$(x+1)^2$				$x^2$	$2x$	1
$(x+1)^3$			$x^3$	$3x^2$	$3x$	1
$(x+1)^4$		$x^4$	$4x^3$	$6x^2$	$4x$	1
$(x+1)^5$	$x^5$	$5x^4$	$10x^3$	$10x^2$	$5x$	1

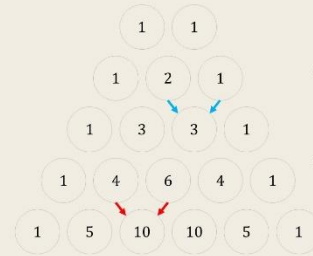
- 從上表中你觀察到什麼規律？

11

多項式乘法關係證明  
認識

## 巴斯卡三角形認識

- 規律：  
每一層的第  $n$  和  $n+1$  個數相加 = 下一層的第  $n+1$  個數



- 法國數學家巴斯卡提出

- 又稱「賈憲三角」或「楊輝三角」

12

多項式乘法關係證明  
認識

## 第二節

多項式乘法關係證明

13

認識

性質

應用

## 活動一

請從「學習單1活動二」求  $(x+1)^3$  的過程中，寫下「將  $(x+1)^3$  展開並做降冪排列，各項的係數依照降冪排列依序為巴斯卡三角形的第三列」可能的原因。

$$(x+1)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 \rightarrow \begin{array}{c} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

14

多項式乘法關係證明  
認識

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

- 想想看  $(x+1)^n$  的係數有兩個變量，要怎麼表示會比較好？

- 利用符號，寫下  $(x+1)^3$  的展開式：

$$(x+1)^3 = \frac{C_3^3}{3} x^3 + \frac{C_2^3}{2} x^2 + \frac{C_1^3}{1} x + \frac{C_0^3}{0}$$

15

多項式乘法關係證明  
認識

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

- 請將巴斯卡三角形前五排的每一個數字改用符號表示。



- 利用符號寫出巴斯卡三角形的關係式。

$$C_{k+1}^{n+1} = C_k^n + C_{k+1}^n$$

16

多項式乘法關係證明  
認識

## 活動二

已知： $(x+1)^n = \frac{C_n^n}{n} x^n + \frac{C_{n-1}^n}{n-1} x^{n-1} + \dots + \frac{C_1^n}{1} x + \frac{C_0^n}{0}$   
 $(x+1)^{n+1} = \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1} x^{n+1} + \frac{C_n^{n+1}}{n} x^n + \dots + \frac{C_1^{n+1}}{1} x + \frac{C_0^{n+1}}{0}$

求證： $C_{k+1}^{n+1} = C_k^n + C_{k+1}^n$

證明：

17

多項式乘法關係證明  
認識

多項式乘法關係證明  
認識

## 第三節課

18

認識

性質

應用

## 活動一

請列出至少 8 列的巴斯卡三角形



19

尋找規律

活動三證明

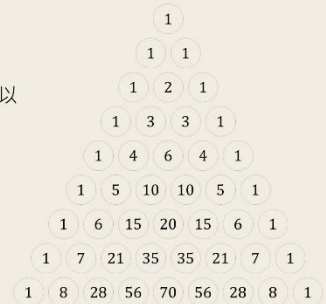
性質

活動四證明

活動五證明

## 活動二

請觀察巴斯卡三角形中數字，你能發現什麼規律嗎？只要能解釋得通任何規律都可以



20

尋找規律

活動三證明

性質

活動四證明

活動五證明

## 活動二

- 規律A  
左右對稱
- 規律B  
最左邊與最右邊都是 1



21

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律C  
左右第二斜列是等差數列  
1、2、3、4、...



22

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律D  
左右第三斜列是三角形數  
1、3、6、10、15、...



23

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律E  
左右第四斜列是四面體數  
1、4、6、10、20、...



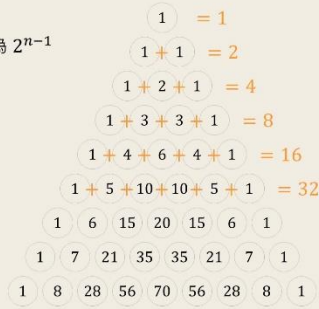
24

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律F  
第  $n$  列的總和為  $2^{n-1}$



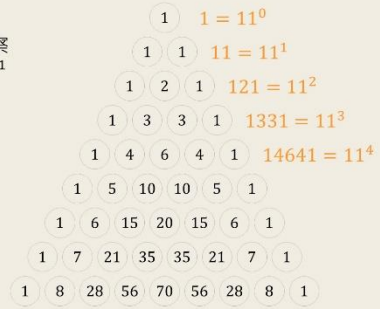
25

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律G  
以十進位制觀察  
第  $n$  列為  $11^{n-1}$



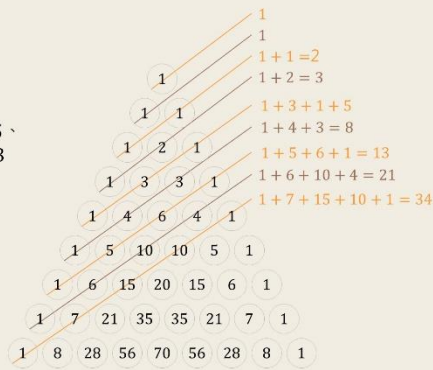
26

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律H  
費波納契數列  
1、1、2、3、5、  
8、13、21、33



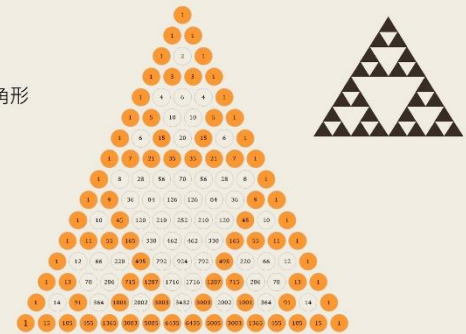
27

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律I  
謝爾賓斯三角形



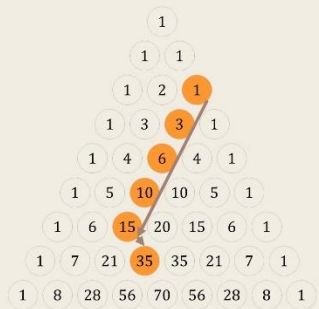
28

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動二

- 規律K  
聖誕襪定理



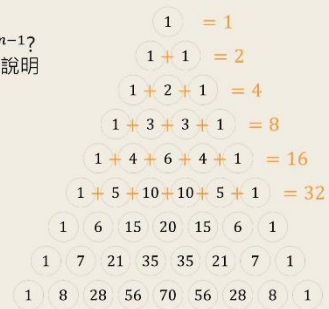
29

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

## 活動三

- 規律F  
為何第  $n$  列數字總和為  $2^{n-1}$ ?  
利用前幾堂課的展開式來說明



30

尋找規律  
活動二  
活動三  
活動四  
活動五

性質

### 活動三

試試看把  $(x+1)^4$  四次方的展開式展開並寫出來

$$(x+1)^4 = 1x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

將  $x=1$  代入

$$(1+1)^4 = 1 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

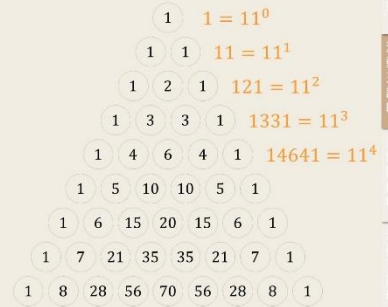
$$\Rightarrow 2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

31

單元目標  
活動三證明  
性質

### 活動三

- 規律G  
為何第  $n$  列為  $11^{n-1}$ ?

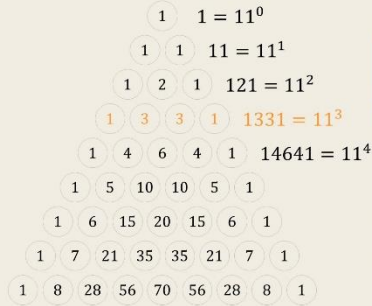


32

單元目標  
活動三證明  
性質

### 活動三

將  $x=10$  代入  $(x+1)^3$   
其實就是巴斯卡的第四列

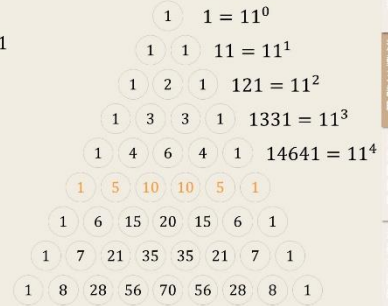


33

單元目標  
活動三證明  
性質

### 活動三

- 請問第六列為 1 5 10 10 5 1  
而不是  $11^{6-1} = 161051$   
請問要如何說明呢?

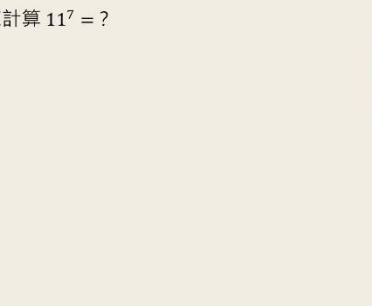


34

單元目標  
活動三證明  
性質

### 活動三

利用巴斯卡三角形的特性來計算  $11^7 = ?$

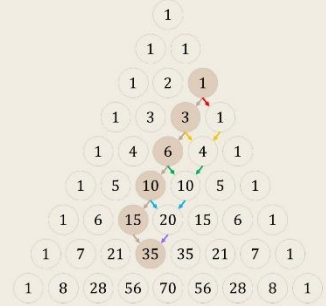


35

單元目標  
活動三證明  
性質

### 活動四

- 規律K  
如何用「巴斯卡定理」  
解釋「聖誕襪定理」呢?

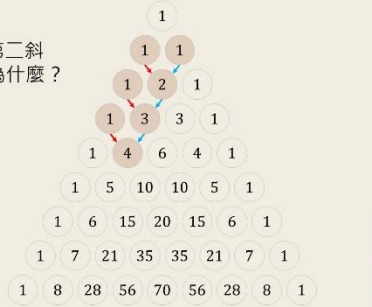


36

單元目標  
活動四證明  
性質

### 活動五

- 規律C  
1. 請說明巴斯卡三角形中第二斜  
列的數列有什麼規律? 為什麼?

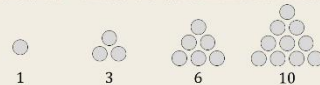


37

單元目標  
活動五證明  
性質

### 活動五

- 規律D、E  
2. 請解釋「三角形數」與「四面體數」是什麼?  
三角形數: 是將圓球排成正三角形所需要的圓球數



四面體數: 是將圓球排成正四面體所需要的圓球數



38

單元目標  
活動五證明  
性質

### 活動五

請畫出「三角形數」與「四面體數」每一層增加的球數。

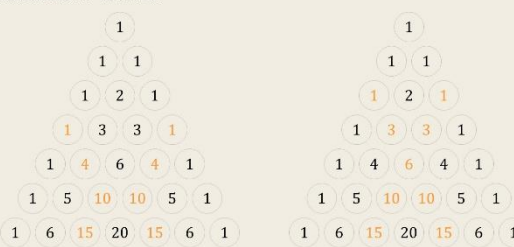
層數	三角形數	圓球數量	四面體數	圓球數量
1		1		1
2		2		3
3		3		6
4		4		10
5		5		15
6		6		21

39

單元目標  
活動五證明  
性質

### 活動五

「三角形數」與「四面體數」的數字關係與巴斯卡三角形中的數字  
哪部分有關係? 為什麼?

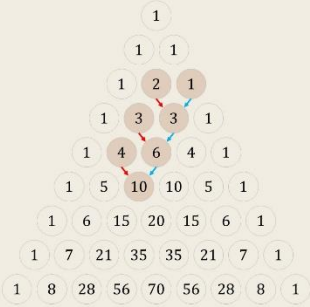
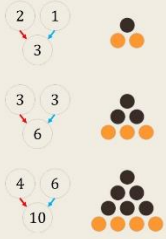


40

單元目標  
活動五證明  
性質

## 活動五

• 解釋規律D

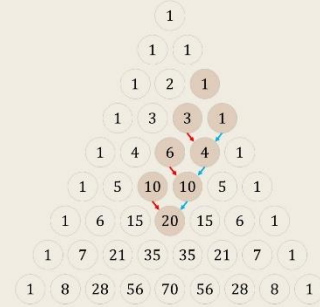


性質  
活動五證明

41

## 活動五

• 解釋規律E



性質  
活動五證明

42

## 第四節課

探索任意正整數的分解方法

認識  
性質  
應用

43

什麼是巴斯卡三角形？



任意正整數的分解方法探索  
應用

44

## 課程問題

對於一個任意的正整數，  
可以將這個正整數寫成一堆正整數的相加。

例如： $3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2$

則對任意正整數  $n$ ，會有幾種相加的方法呢？

任意正整數的分解方法探索  
應用

45

## 活動一

試著找出正整數 5 總共有幾種相加的方法？

任意正整數的分解方法探索  
應用

46

## 活動二

試著找出正整數 6 總共有幾種相加的方法？

任意正整數的分解方法探索  
應用

47

## 活動三

正整數  $n$  總共有幾種相加的方法？  
請把一般式寫出來？

數字	2	3	4	5	6	7
方法數	2	4	8	16	32	64

正整數  $n$  總共有  $2^{n-1}$  種相加的方法

任意正整數的分解方法探索  
應用

48

## 第五節課

證明任意正整數的分解方法

認識  
性質  
應用

49

## 回顧課程問題

對於一個任意的正整數，  
可以將這個正整數寫成一堆正整數的相加。

例如： $3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 1 + 2$

則對任意正整數  $n$ ，會有幾種相加的方法呢？

任意正整數的分解方法證明  
應用

50

## 活動一

說明 若將一個任意的正整數  $n$  寫成一堆正整數的相加，共有  $2^{n-1}$  種相加的方法。

	1 堆	2 堆	3 堆	4 堆	5 堆	6 堆	7 堆	總和
2	1	1						$1+1$
3	1	2	1					$1+2+1$
4	1	3	3	1				$1+3+3+1$
5	1	4	6	4	1			$1+4+6+4+1$
6	1	5	10	10	5	1		$1+5+10+10+5+1$
7	1	6	15	20	15	6	1	$1+6+15+20+15+6+1$

應用  
任意正整數的分解方法證明

## 想一想

針對這個的結果...

有沒有更快、更好的方式  
來說明這漂亮的結果？

52

應用  
任意正整數的分解方法證明

## 活動二

若將數字  $n$  想成有  $n$  個相同的球排成一列  
若可以任意數量一組，並分成任意堆數  
則共有幾種分組方法？

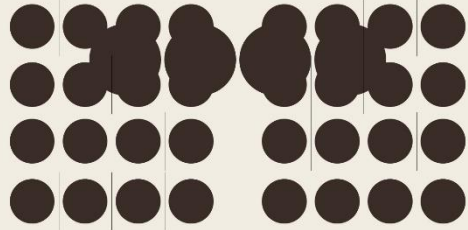


53

應用  
任意正整數的分解方法證明

## 活動二

1. 若有 4 個球 ( $n=4$ )，有幾種分組情形？



54

應用  
任意正整數的分解方法證明

## 活動二

2. 若將桌上有  $n$  個相同的球分成若干堆（每堆數量可不同），則共有幾種分組方法？



3. 分球的問題和拆數字的有什麼關聯？

55

應用  
任意正整數的分解方法證明

## 活動二

4. 有沒有其他解釋方法？



共有  $n-1$  個間隔，每個間隔都可選擇 分開 或 不分开

56

應用  
任意正整數的分解方法證明



# 【巴斯卡三角形的認識與應用】

## 學習單1

班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

### 活動一

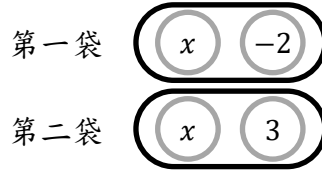
展開並化簡多項式  $(x + 3)(x - 2) =$

### 活動二

除了課本學過的橫式及直式運算外，多項式乘法也可以這樣算：

你可以每一個多項式的括號看做一個袋子

每個袋子裡面有兩種球，一種標註  $x$ ，另一個標註數字，如圖。



1. 回答下列問題

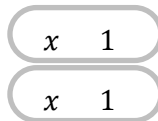
(1) 若每個袋子中取一個球，請問有幾種取法？

(2) 若將取球的情形做分類，你會怎麼分？

2. 展開並化簡  $(x + 1)^2$

(1) 先利用橫式、直式或乘法公式（擇一）展開並化簡  $(x + 1)^2$ 。

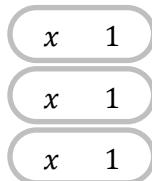
(2) 利用取球的方法說明化簡  $(x + 1)^2$  後的結果。



3. 展開並化簡  $(x + 1)^3$

(1) 先利用橫式、直式（擇一）展開並化簡  $(x + 1)^3$ 。

(2) 利用取球的方法說明化簡  $(x + 1)^3$  後的結果。



4.  $(x + 1)^2$ 、 $(x + 1)^3$  化簡後的係數與取球方法有什麼關係？

### 活動三

- 若要計算  $(x+1)^4$ 、 $(x+1)^5$ ，你會使用哪一種方法？為什麼？
- 展開並化簡下列多項式。
  - $(x+1)^4$
  - $(x+1)^5$

### 活動四

- 將  $(x+1)^n, n=1,2,3,4,5$  的計算結果依照各項填入下表整理（若有缺項可不填）。  
如  $(x+1)^1 = x+1$ ，則在  $x$  項與常數項下方欄位填入「 $x$ 」與「 $1$ 」，其餘欄位空白。

項 多項式	$x^5$	$x^4$	$x^3$	$x^2$	$x$	1
$(x+1)^1$					$x$	1
$(x+1)^2$						
$(x+1)^3$						
$(x+1)^4$						
$(x+1)^5$						

- 從上表中你觀察到什麼規律？

# 【巴斯卡三角形的認識與應用】

## 學習單2

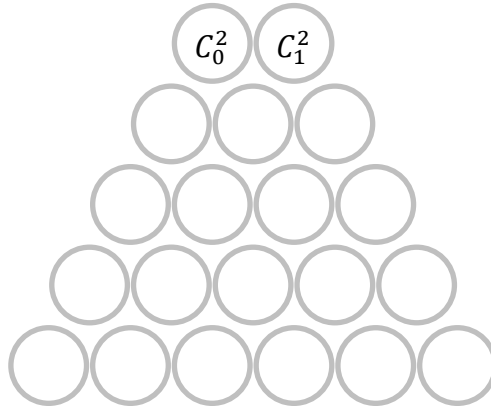
班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

### 活動一

請從「學習單1活動二」求  $(x+1)^3$  的過程中，寫下「將  $(x+1)^3$  展開並做降冪排列，各項的係數依照降冪排列依序為巴斯卡三角形的第三列」可能的原因。

## 活動二

1. 想想看  $(x+1)^n$  的係數有兩個變量，要怎麼表示會比較好？
2. 利用符號，寫下  $(x+1)^3$  的展開式：  
 $(x+1)^3 = \underline{\hspace{2cm}}x^3 + \underline{\hspace{2cm}}x^2 + \underline{\hspace{2cm}}x + \underline{\hspace{2cm}}$
3. 請將帕斯卡三角形前五排的每一個數字改用符號表示。



4. 利用符號寫出帕斯卡三角形的關係式。
5. 利用符號完成  $(x+1)^n$  係數與帕斯卡三角形的關係的證明。

已知： $(x+1)^n = \underline{\hspace{2cm}}x^n + \underline{\hspace{2cm}}x^{n-1} + \dots + \underline{\hspace{2cm}}x + \underline{\hspace{2cm}}$

$(x+1)^{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}x^{n+1} + \underline{\hspace{2cm}}x^n + \dots + \underline{\hspace{2cm}}x + \underline{\hspace{2cm}}$

求證：

證明：

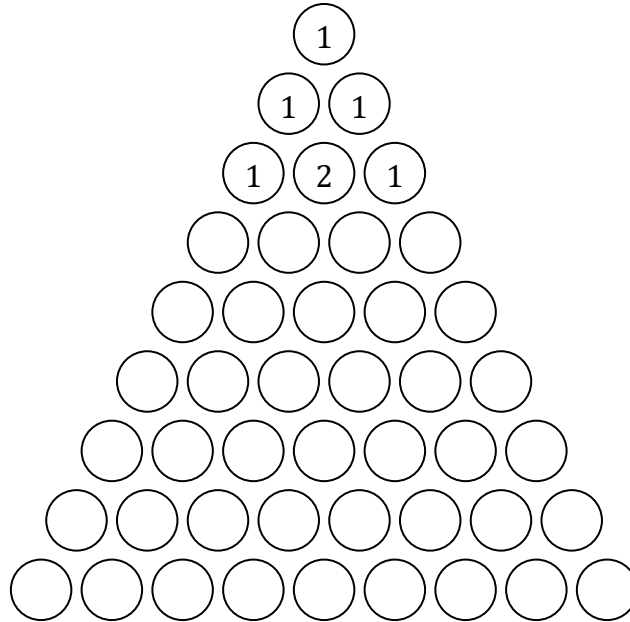
# 【巴斯卡三角形的認識與應用】

## 學習單3

班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

### 活動一

請列出至少8列的巴斯卡三角形



### 活動二

從上面的巴斯卡三角形數字中，除了上面兩數相加等於下面的數字，你還能從中觀察到其他特殊規律嗎？

### 活動三

(1) 想想看為何第  $n$  列數字總和為  $2^{n-1}$  ?

提示：試試看把  $(x+1)^4$  四次方的展開式展開並寫出來。

寫出來的係數是巴斯卡的第幾列呢？

(2) 請問  $x=10$  時，巴斯卡三角形每一列的數字有什麼性質嗎？

(3) 為何第六列為  $1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \neq 1\ 6\ 10\ 5\ 1$  ?

(4) 試用巴斯卡三角形特性來計算請問  $11^7 = ?$

活動四 請利用巴斯卡定理來解釋聖誕襪定理

**活動五**

1. 請說明巴斯卡三角形中第二斜列的數列有什麼規律？為什麼？
2. 請解釋「三角形數」與「四面體數」是什麼？

3. 請畫出「三角形數」與「四面體數」每一層增加的球數。

層數	三角形數	圓球數量	四面體數	圓球數量
1	●		●	
2	● ●		● ● ●	
3	● ● ●		● ● ● ● ●	
4				
5				
6				

4. 「三角形數」與「四面體數」的數字關係與巴斯卡三角形中的數字哪部分有關係？為什麼？



# 【巴斯卡三角形的認識與應用】

## 學習單4

班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

對於一個任意的正整數，可以將這個正整數寫成一堆正整數的相加。

例如：3 可以寫成  $1+1+1$  或  $2+1$  或  $1+2$ ，共三種方法

### 活動一

試著找出正整數 5 總共有幾種相加的方法？

### 活動二

試著找出正整數 6 總共有幾種相加的方法？

### 活動三

猜一猜正整數  $n$  總共有幾種相加的方法？請把一般式寫出來？

# 【巴斯卡三角形的認識與應用】

## 學習單5

班級：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

對於一個任意的正整數，可以將這個正整數寫成一堆正整數的相加。

例如：3 可以寫成  $1 + 1 + 1$  或  $2 + 1$  或  $1 + 2$ ，共三種方法

### 活動一

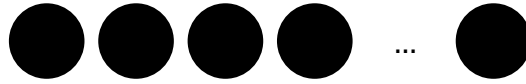
根據「學習單4中活動三」的猜測：

若將一個任意的正整數  $n$  寫成一堆正整數的相加，共有\_\_\_\_\_種相加的方法。

請說明為何上面的敘述正確？

活動二

將桌上有  $n$  個相同的球分成若干堆（每堆數量可不同）



1. 若  $n = 4$ ，有幾種分組情形？試著動手畫畫看！
2. 若將桌上有  $n$  個相同的球分成若干堆（每堆數量可不同），則共有幾種分組方法？
3. 想想看，分球的問題和拆數字的有什麼關聯？兩者間有什麼相同或相異之處？
4. 除了用第2.題的方法外，請用其他方式解釋兩個問題的結果。