

國中獨立研究課程融入數學學科教案

教案名稱：費波那契數列—應用於拼圖遊戲及日常生活

一、課程簡介

<p>給使用者的話</p>	<p>本課程為特殊需求領域的「獨立研究」融入「數學」學科之模組，課程內容為費波那契數列，適用對象為國中八~九年級學生，活動時間共五節課。第一節課上課前學生需先自行查詢與費波那契數列相關的資料，於課堂上分享，教案中也提供了4個面向供教師參閱；第二~五節課皆為費波那契數列的應用，讓學生從幾何與代數不同的角度進行觀察，找關聯，並解釋原因，其中第二、三節課為拼貼相似等腰三角形的拼圖遊戲，第四、五節課從走樓梯的問題出發，同時討論問題的等價描述，讓學生體驗同樣一個問題如何套入不同的情境裡，最後針對正整數相加這個等價描述做延伸探討，帶出費波那契數列的等價式子。</p> <p>本課程的設計囊括費波那契數列的廣度以及深度，理念是希望學生從活動與問題中進行以下的過程：嘗試舉例→觀察規律→發現事實→形成解釋，透過教師逐步搭鷹架，學生動手解決問題並驗證自己的想法，在小組討論中訓練批判思考的能力，藉此培養探究的習慣與精神。</p>
<p>單元架構</p>	<pre>graph TD; A[第一節：查資料與分享] --- B[第二、三節：拼圖遊戲]; A --- C[第四節：走樓梯問題]; A --- D[第五節：正整數相加延伸];</pre> <p>第一節：查資料與分享</p> <ul style="list-style-type: none">費波那契數列問題費波那契數列與黃金比例大自然中的費波那契數列費波那契數列的應用歸納與定義費波那契數列 <p>第二、三節：拼圖遊戲</p> <ul style="list-style-type: none">畫出正五邊形中的等腰三角形拼出相似圖形/剪出相似圖形探討元件數量與費氏數列的關係歸納費氏數列的遞迴式與一般式 <p>第四節：走樓梯問題</p> <ul style="list-style-type: none">計算上樓梯走1或2階的方法數探討走法數與費氏數列的關係連結至正整數用1或2相加問題討論/創造不同情境問題 <p>第五節：正整數相加延伸</p> <ul style="list-style-type: none">延伸至正整數用大於1相加探討方法數與費氏數列的關係統整費氏數列的等價式子 <p>相關內容：</p> <ul style="list-style-type: none">✓ 義大利數學家費波那契✓ 兔子繁殖✓ 鳳梨果目螺旋的數量✓ 向日葵種子螺旋排列的數量✓ 雄蜂的譜系✓ 後項與前項的比值✓ 黃金矩形✓ 繪製樹枝圖形✓ 變色時鐘
<p>教材特色與分析</p>	<ol style="list-style-type: none">生活中處處有費波那契數列的規律，像是鳳梨、向日葵、時鐘、走樓梯、拼圖遊戲等等，本課程藉由不同的活動設計讓學生體驗費波那契數列的廣度。課堂中學生除了要能解答問題，本課程更著重於學生如何解釋觀察到的現象。費波那契數列除了遞迴關係式，還有其餘等價式子，本課程讓學生從延伸的代數問題中自然發現這個關係，也讓學生探究費波那契數列的深度。

二、課程計畫

單元名稱	費波那契數列—應用於拼圖遊戲及日常生活		
適用對象	<input type="checkbox"/> 七年級 <input checked="" type="checkbox"/> 八年級 <input checked="" type="checkbox"/> 九年級	設計者	中興國中 張怡雯老師 中興國中 李慧玲老師 光明國中 張順良老師
活動時間	五 節 (每節 45 分, 共 225 分)	設計期間	111.11 ~ 112.07
核心素養	<p>數學</p> <ul style="list-style-type: none"> 數-J-A1 對於學習數學有信心和正向態度，能使用適當的數學語言進行溝通，並能將所學應用於日常生活中。 數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。 數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。 <p>獨立研究</p> <ul style="list-style-type: none"> 特獨-J-A2 提出適切的探究問題，依據習得的知識，透過獨立思考與分析，提出可能的問題解決模式，並實際驗證及解析。 特獨-J-C2 透過獨立研究小組學習，發展與同儕溝通、共同參與、執行及討論的能力，能接納不同意見，具備與人和諧互動技巧。 		
學習表現	<p>數學</p> <ul style="list-style-type: none"> n-IV-7 辨識數列的規律性，以數學符號表徵生活中的數量關係與規律，認識等差數列與等比數列，並能依首項與公差或公比計算其他各項。 a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。 n-V-5 能察覺規律並以一般項或遞迴方式表現，進而熟悉級數的操作。 <p>獨立研究</p> <ul style="list-style-type: none"> 特獨1a-IV-2 透過與同儕的討論，分享探索的樂趣。 特獨1a-IV-3 透過動手解決問題或驗證自己想法，而獲得成就感。 特獨2b-IV-3 知道自己及他人所觀察、記錄或蒐集資料所得的現象、實驗數據，並推論其中的關聯性。 特獨3c-IV-1 運用圖書館、網路、線上資料庫、期刊等，依據研究主題，搜尋相關 		

	<p>資料。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 特獨3e-IV-2 從得到的資訊或數據，分析出差異，形成解釋、獲知因果關係。
學習內容	<p>數學</p> <ul style="list-style-type: none"> • N-8-3 認識數列：生活中常見的數列及其規律性(包括圖形的規律性)。 • A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次式的化簡及同類項；以符號記錄生活中的情境問題。 • S-9-11 證明的意義：幾何推理(須說明所依據的幾何性質)；代數推理(須說明所依據的代數性質)。 • N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式。 <p>獨立研究</p> <ul style="list-style-type: none"> • 特獨B-IV-1 批判思考能力訓練。 • 特獨C-IV-3 文獻蒐集管道：書刊、線上資料庫、文獻資料的引用與附註方式。
單元目標	<p>第一節：查資料與分享</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能運用各種文獻蒐集的管道，搜尋並整理出與費波那契數列相關的資料。 2. 學生在查資料或聽他人報告時，能了解何謂費波那契數列及可以應用在哪些地方。 3. 學生發表完後，能根據檢核表的內容進行互評與自評。 <p>第二、三節：拼圖遊戲</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能從拼貼相似等腰三角形的拼圖遊戲中，觀察規律並完成任務。 2. 學生能觀察出元件個數的值與費波那契數列的關聯。 3. 學生能運用代數或幾何等表徵去詮釋觀察到的現象。 4. 學生能了解費波那契數列的不同表示式(遞迴式、一般式)與其實用性。 <p>第四節：走樓梯問題</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能觀察出走樓梯的方法數與費波那契數列的關聯。 2. 學生能運用代數或幾何等表徵去詮釋觀察到的現象。 3. 學生能將走樓梯的情境轉化成正整數相加的問題，並能分析出需增加的條件。 4. 學生能從與走樓梯問題等價的描述中，解釋同樣一個問題如何套入不同的情境裡。 <p>第五節：正整數相加延伸</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能從正整數相加的延伸問題中，推論出費波那契數列的等價式子。 2. 學生能運用代數或幾何等表徵去詮釋觀察到的現象。

區分性教學之調整	區分性課程調整	
	組別	低能力組 高能力組
	內容	<p>1. 第一節查資料時，可以從兔子繁殖、生活中費氏數列等觀察規律的面向著手。</p> <p>2. 第二、三節課僅需完成相似等腰三角形的拼圖任務。</p> <p>3. 第四節課只要能解釋4個等價問題(A~D)。</p> <p>4. 第五節與費氏數列等價的式子僅需理解就好。</p>
	過程	<p>能藉由教師的引導逐步詮釋觀察到的現象。</p> <p>能在沒有太多提示的情況下，詮釋觀察到的現象。</p>
成果	<p>完成課堂中指定的任務。</p> <p>嘗試探討延伸的任務。</p>	
參考資料	<ol style="list-style-type: none"> 賴以威 (2021)。賴爸爸的數學實驗：12堂生活數感課 (第1版)。遠流。 Arthur, B. (2013, November 9). The Magic of Fibonacci Numbers Arthur Benjamin. YouTube. https://youtu.be/SjSHVDfXHQ4 楊嘉慧 (2009年5月20日)。在大自然中窺見費伯納契數列。科學人。 https://sa.ylib.com/MagArticle.aspx?id=1389 TESSELLATIONS Math+Art=Learning²，檢自：http://www.tesselations.com/ 游森朋(2022年11月2日)。國立臺灣師範大學數學系教授。桃園資優班教師數學工作坊講義。 	
教學資源	學習單、3D列印拼圖模組	

三、各單元教學活動

第一節教學活動		時間	評量	備註																																										
<p>這節課提供一個契機讓資優生能夠去查找文獻資料，並上臺與同學分享。</p> <p>【課前分組】 於開始上課前一段適當的日子（約1~4週）前，教師可以先將學生進行分組，讓學生回家自己查找有關「費波那契數列（Fibonacci Sequence）」文獻資料，並請學生將內容製作成簡報上臺分享。</p> <p>為避免學生查找的內容一致性太高，教師可將內容主題進行分類，以下4個分類供參考，教師可自行重新調整：</p> <p>一、費波那契數列問題。 二、費波那契數列與黃金比例。 三、大自然中費波那契數列。 四、費波那契數列的應用。</p> <p>【上臺分享】 課堂中，學生依序上臺分享。學生可依下表評分規準進行互評。</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>給分 向度</th> <th>5</th> <th>4</th> <th>3</th> <th>2</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>內容完整度</td> <td>內容完全正確且深入，依照內容修飾呈現，文字長度適宜，確實標示出重點。</td> <td>正確表達扼要內容修飾呈現，且有層次的確實表達重點。</td> <td>內容約80%正確與主題相關。</td> <td>內容對錯參半40~80%與主題有關，能將內容以簡短文宇條列式呈現。</td> <td>內容錯誤百出，不到40%與主題相關，僅能將內容以段落式文章敘述呈現。</td> </tr> <tr> <td>內容圖表</td> <td>能運用圖表分析，完整呈現出架構，表達出內容深層的意思，及自我的想法。</td> <td>能運用圖表呈現，表達出內容的意涵，但未能充分說明。</td> <td>有運用圖表呈現，約80%與主題內容有相關性。</td> <td>有運用圖表呈現，但僅40~80%與主題內容有相關。</td> <td>圖表與主題不符，或沒有運用圖表呈現，僅用文字表達內容。</td> </tr> <tr> <td>口語表達</td> <td>口語表達清楚，表達生動活潑，能吸引聽眾注意，且聯繫前後文句，依情境變化，適切掌控語速，語調有抑揚頓挫。</td> <td>口齒清晰，說明有架構。</td> <td>完成約80%報告重點。</td> <td>完成40~80%報告重點。</td> <td>辭不達意，音量太小，聽不清楚。</td> </tr> <tr> <td>回應答辯</td> <td>使用合宜的資訊清楚回答觀眾問題。</td> <td>清楚回答觀眾的問題。</td> <td>試圖回答觀眾的問題，但是聽者並不理解或者解釋有錯誤。</td> <td>僅以最簡短的答案回答觀眾問題，並無加以說明解釋。</td> <td>無法回應提問，在現場呆住。</td> </tr> <tr> <td>簡報效果</td> <td>效果與內容相呼應，整體畫面舒適。適當強化重點或吸引觀眾注意。</td> <td>效果與內容相呼應，整體畫面尚可。有強化重點或能吸引觀眾注意。</td> <td>強化重點的效果與內容相呼應。</td> <td>整份簡報僅有文字、單一顏色、一種字體，無任何效果。</td> <td>整體畫面凌亂。</td> </tr> <tr> <td>小組分工</td> <td>依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作量，能互助合。</td> <td>依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作量。</td> <td>僅工作分配，每人皆能完成分內任務。</td> <td>僅工作分配，大部分成員能完成分內任務。</td> <td>分工不均，少有組員能完成分內任務。</td> </tr> </tbody> </table>		給分 向度	5	4	3	2	1	內容完整度	內容完全正確且深入，依照內容修飾呈現，文字長度適宜，確實標示出重點。	正確表達扼要內容修飾呈現，且有層次的確實表達重點。	內容約80%正確與主題相關。	內容對錯參半40~80%與主題有關，能將內容以簡短文宇條列式呈現。	內容錯誤百出，不到40%與主題相關，僅能將內容以段落式文章敘述呈現。	內容圖表	能運用圖表分析，完整呈現出架構，表達出內容深層的意思，及自我的想法。	能運用圖表呈現，表達出內容的意涵，但未能充分說明。	有運用圖表呈現，約80%與主題內容有相關性。	有運用圖表呈現，但僅40~80%與主題內容有相關。	圖表與主題不符，或沒有運用圖表呈現，僅用文字表達內容。	口語表達	口語表達清楚，表達生動活潑，能吸引聽眾注意，且聯繫前後文句，依情境變化，適切掌控語速，語調有抑揚頓挫。	口齒清晰，說明有架構。	完成約80%報告重點。	完成40~80%報告重點。	辭不達意，音量太小，聽不清楚。	回應答辯	使用合宜的資訊清楚回答觀眾問題。	清楚回答觀眾的問題。	試圖回答觀眾的問題，但是聽者並不理解或者解釋有錯誤。	僅以最簡短的答案回答觀眾問題，並無加以說明解釋。	無法回應提問，在現場呆住。	簡報效果	效果與內容相呼應，整體畫面舒適。適當強化重點或吸引觀眾注意。	效果與內容相呼應，整體畫面尚可。有強化重點或能吸引觀眾注意。	強化重點的效果與內容相呼應。	整份簡報僅有文字、單一顏色、一種字體，無任何效果。	整體畫面凌亂。	小組分工	依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作量，能互助合。	依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作量。	僅工作分配，每人皆能完成分內任務。	僅工作分配，大部分成員能完成分內任務。	分工不均，少有組員能完成分內任務。	30分鐘	利用評分表進行互評	<p>評分表可參考附件二</p> <p>評分規準可自行調整</p>
給分 向度	5	4	3	2	1																																									
內容完整度	內容完全正確且深入，依照內容修飾呈現，文字長度適宜，確實標示出重點。	正確表達扼要內容修飾呈現，且有層次的確實表達重點。	內容約80%正確與主題相關。	內容對錯參半40~80%與主題有關，能將內容以簡短文宇條列式呈現。	內容錯誤百出，不到40%與主題相關，僅能將內容以段落式文章敘述呈現。																																									
內容圖表	能運用圖表分析，完整呈現出架構，表達出內容深層的意思，及自我的想法。	能運用圖表呈現，表達出內容的意涵，但未能充分說明。	有運用圖表呈現，約80%與主題內容有相關性。	有運用圖表呈現，但僅40~80%與主題內容有相關。	圖表與主題不符，或沒有運用圖表呈現，僅用文字表達內容。																																									
口語表達	口語表達清楚，表達生動活潑，能吸引聽眾注意，且聯繫前後文句，依情境變化，適切掌控語速，語調有抑揚頓挫。	口齒清晰，說明有架構。	完成約80%報告重點。	完成40~80%報告重點。	辭不達意，音量太小，聽不清楚。																																									
回應答辯	使用合宜的資訊清楚回答觀眾問題。	清楚回答觀眾的問題。	試圖回答觀眾的問題，但是聽者並不理解或者解釋有錯誤。	僅以最簡短的答案回答觀眾問題，並無加以說明解釋。	無法回應提問，在現場呆住。																																									
簡報效果	效果與內容相呼應，整體畫面舒適。適當強化重點或吸引觀眾注意。	效果與內容相呼應，整體畫面尚可。有強化重點或能吸引觀眾注意。	強化重點的效果與內容相呼應。	整份簡報僅有文字、單一顏色、一種字體，無任何效果。	整體畫面凌亂。																																									
小組分工	依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作量，能互助合。	依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作量。	僅工作分配，每人皆能完成分內任務。	僅工作分配，大部分成員能完成分內任務。	分工不均，少有組員能完成分內任務。																																									
<p>【綜合回饋】</p> <p>一、回收評分表，進行分數統計。 二、根據學生上臺報告的內容及表現，及評分表的給分及質性評語，給予適當的回饋與指導。 三、對於學生報告內容不足之處，進行補充。</p>		15分鐘	互相討論、口頭評語	<p>評分表分數統計應考量學生人數及剩餘時間</p>																																										

【綜合歸納】

教師在這一堂課結束前，要歸納何謂費波那契數列。

1. 費波那契數列的遞迴關係式： $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$

2. 定義費波那契數列的足碼 i 與一般項 f_i 如下表：

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	0	1	1	2	3	5	8	13	21

註：建議教師讓學生動手多算幾項，熟悉或者記住數字的大小，建立數感。

第二節教學活動

時間

評量

備註

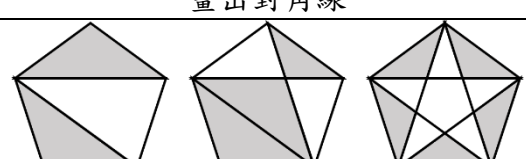

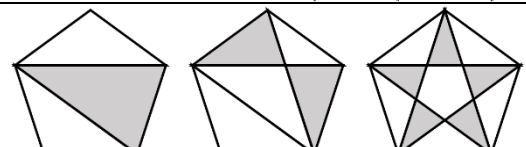

一、引導活動

前導活動：正五邊形中的三角形

學生實作：

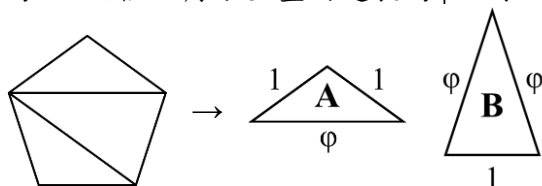
請學生在正五邊形上畫對角線，畫幾條線由學生自行決定，畫完後觀察對角線所切出來的三角形，並說出有甚麼發現。

[學生可能畫出的圖形與三角形的種類]

畫出對角線	三角形的種類
	 元件A 等腰鈍角三角形 $36^\circ-108^\circ-36^\circ$
	 元件B 等腰銳角三角形 $72^\circ-36^\circ-72^\circ$

[兩種三角形的邊長關係]

設正五邊形的邊長為1，兩種三角形重疊的邊長為 ϕ ，得



二、發展活動：

活動一：「拼」出相似三角形

學生實作：

學生分組討論，以的兩種等腰三角形當成元件，設定鈍角等腰三角形為元件A，銳角等腰三角形為元件B，完成學習單中的任務。



10min
(累10)

學習單
實作
評量

1. 利用這兩種等腰三角形元件，分別拼出和元件A相似、和元件B相似的等腰三角形圖形，並紀錄使用兩種元件的數量以及總數。

(1) 一開始先讓學生任意拼。(大約5分鐘)

(2) 接著引導學生有系統地拼貼，將腰的邊長一層層向外疊加，每一次可以加1或者 φ 的長度。

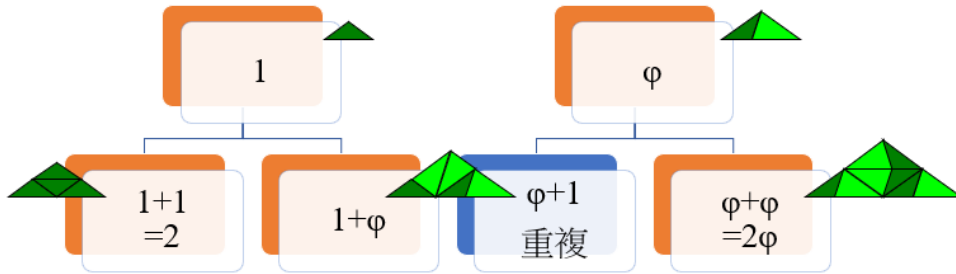
10min

(累20)

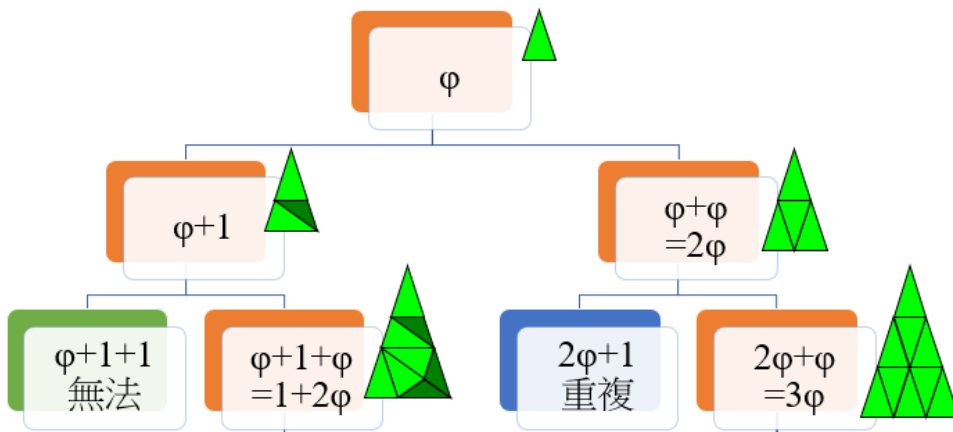
學習單

實作

評量



和元件A相似之圖形(向右疊加)



和元件B相似之圖形(向下疊加)

(3) 給表格讓學生填入數量。

10min

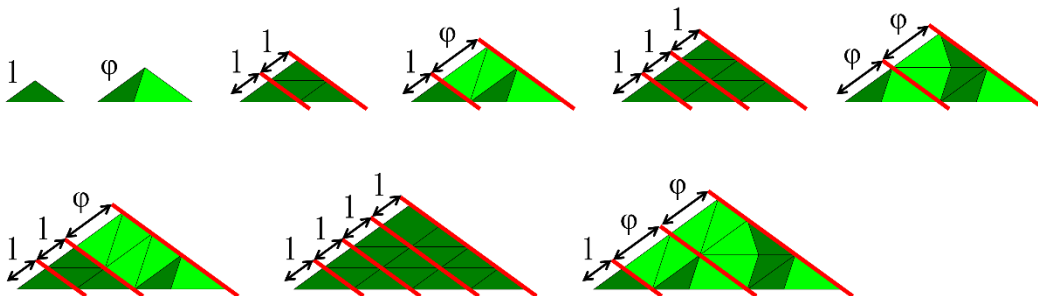
(累30)

學習單

實作

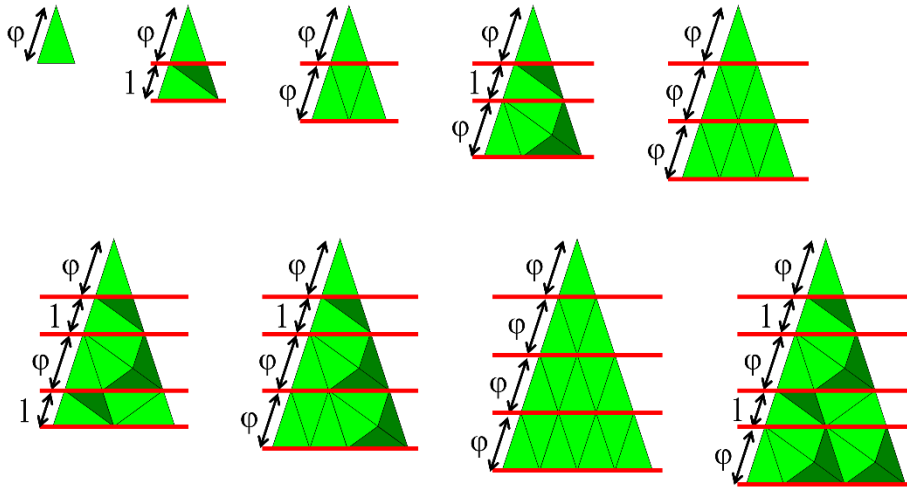
評量

和元件A相似之圖形



腰邊長	1	φ	2	$1+\varphi$	3	2φ	$2+\varphi$	4	$1+2\varphi$
元件A	1	1	4	2	9	4	5	16	5
元件B	0	1	0	3	0	4	5	0	8
總和	1	2	4	5	9	8	10	16	13

和元件B相似之圖形



腰邊長	ϕ	$1+\phi$	2ϕ	$1+2\phi$	3ϕ	$2+2\phi$	$1+3\phi$	4ϕ	$2+3\phi$
元件A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
元件B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

2. 請學生觀察表格中的數字或拼出來的圖形，任意說出有甚麼發現？

參考答案：舉例和元件B相似之圖形

數字：等差數列、二級等差數列、平方數列、費氏數列...

圖形：一層層疊加時，菱形與梯形的規律。

(數字) 等差數列：

腰邊長	ϕ	$1+\phi$	2ϕ	$1+2\phi$	3ϕ	$2+2\phi$	$1+3\phi$	4ϕ	$2+3\phi$
元件A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
元件B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

(數字) 二級等差數列：

腰邊長	ϕ	$1+\phi$	2ϕ	$1+2\phi$	3ϕ	$2+2\phi$	$1+3\phi$	4ϕ	$2+3\phi$
元件A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
元件B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

(數字) 平方數列：

腰邊長	ϕ	$1+\phi$	2ϕ	$1+2\phi$	3ϕ	$2+2\phi$	$1+3\phi$	4ϕ	$2+3\phi$
元件A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
元件B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

15min

(累45)

學習單

實作

評量

口頭

報告

(數字) 費氏數列：

腰邊長	ϕ	$1+\phi$	2ϕ	$1+2\phi$	3ϕ	$2+2\phi$	$1+3\phi$	4ϕ	$2+3\phi$
元件A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
元件B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

三、綜合/總結活動

總結活動一，當選擇不同腰長時，會有不同的規律出現，日常生活中或者解題時，常常也需要依循「列舉可能情況→觀察規律→發現關鍵」這樣的過程來解決問題。

第三節教學活動

時間

評量

備註

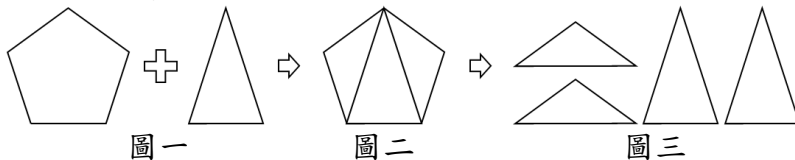
一、引導活動

回顧第二節課，在拼出相似三角形的活動中，是將圖形放大，而這節課將反向操作，在一個大的正五邊形中，剪出相似三角形，將圖形縮小。

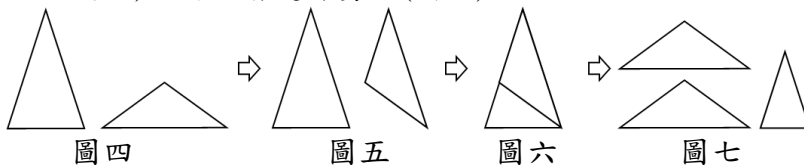
二、發展活動：

活動二：「剪」出相似三角形

1. 發給每組一個正五邊形及一個相似元件B(圖一)，將兩個圖形重疊(圖二)，延著邊線剪下，可以得到兩個相似元件A和兩個相似元件B(圖三)；



拿起剛剛剪出的圖形中，最小的相似元件A和B(圖四)，轉方向重疊後(圖五、圖六)，再延著邊線剪下(圖七)；



按照上述步驟剪完後，會得到以下圖形：



2. 請學生對應剪完的圖形和活動一中拼貼出來的哪一個圖形大小是一樣的，並記錄使用的元件總數，觀察這些數字，說出有甚麼發現？

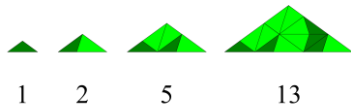
和元件A相似之圖形	和元件B相似之圖形
-----------	-----------

15min
(累15)

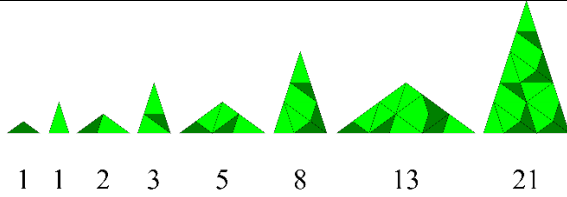
學習單
實作
評量

12min
(累27)

學習單
實作
評量



將兩類圖形交錯排列，其拼貼數量為費波那契數列！



3. 請學生說明為什麼數量會形成費波那契數列？

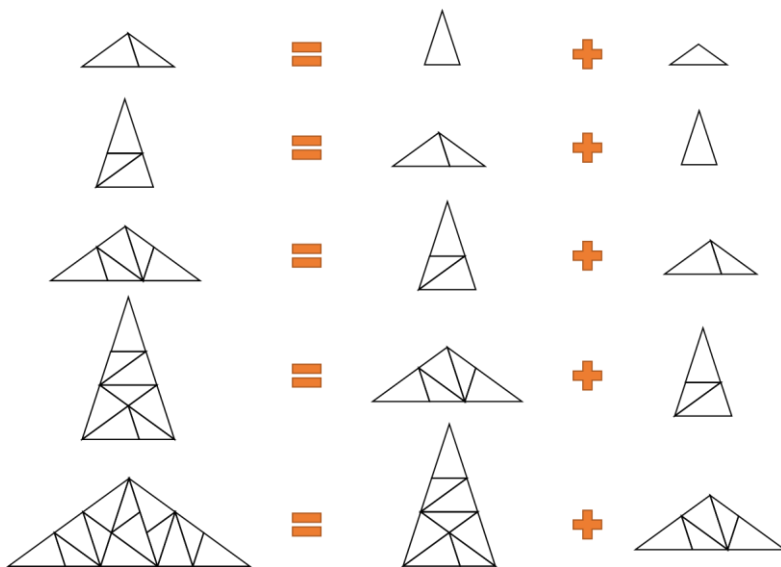
參考答案：

拼出和元件A相似的等腰三角形時，相似圖形由小至大所需要的元件數量分別是：1,2,5,13,34,89,...；

拼出和元件B相似的等腰三角形時，相似圖形由小至大所需要的元件數量分別是：1,3,8,21,55,144,...；

如果將兩組數字合併，就會得到1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...，而這正好就是費波那契數列。

原因如下圖所示：



三、綜合/總結活動

在拼圖遊戲中，我們利用費波那契數列的遞迴關係式 $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ 來解釋元件數量所形成的規律，遞迴關係式告訴我們這一項與前兩項的關係，但如果要直接算某一項，我們能不能推算出一般式呢？

答案是可以在的！但是，一般式如下：

15min
(累42)

學習單
實作
評量
口頭
報告

3min
(累45)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

如果要用這個帶有根號與次方的式子去運算，實在有些不切實際啊！

第四節教學活動

時間

評量

備註

一、引導活動

活動一：走樓梯問題

教師提問：

爬樓梯是大家日常中都會做的事情，但是同學們有想過以下這道問題嗎？

如果樓梯只有一階，上樓梯的走法當然只有一種；



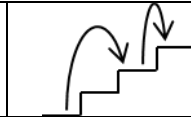
如果樓梯有兩階，你可以選擇一步1階，也可以一步2階，所以有兩種走法；

那麼如果樓梯有三階以上，會有幾種走法呢？

注意：基於安全考量，不可以一步跨3階以上喔！

教師帶領學生討論：

教師可以先帶學生討論樓梯階數=3的情況，共有以下3種走法。

圖示			
加法表示	1+1+1	1+2	2+1







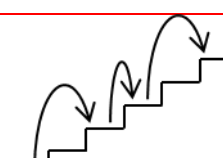
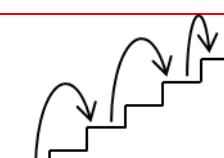
二、發展活動

學生實作：

學生分組討論，回答學習單中的問題一~三。

問題一：如果樓梯有五階，則總共有幾種走法？

參考答案：有8種走法。

圖示				
加法	1+1+1+1+1	1+1+1+2	1+1+2+1	1+2+1+1
圖示				
加法	2+1+1+1	1+2+2	2+1+2	2+2+1

5min
(累10)

學習單
實作
評量

問題二：請完成下方表格。

樓梯階數	走法描述	方法數
1	1	1
2	1+1、2	2
3	1+1+1、1+2、2+1	3
4	1+1+1+1、1+1+2、1+2+1、2+1+1、2+2	5
5	1+1+1+1+1、1+1+1+2、1+1+2+1、1+2+1+1、2+1+1+1、1+2+2、2+1+2、2+2+1	8
6	1+1+1+1+1+1、1+1+1+1+2、1+1+1+2+1、1+1+2+1+1、1+2+1+1+1、2+1+1+1+1、1+1+2+2、1+2+1+2、1+2+2+1、2+1+1+2、2+1+2+1、2+2+1+1、2+2+2	13

問題三：觀察上方表格，你發現了甚麼？請試著解釋觀察到的規律。

參考答案：

走法數1,2,3,5,8,13,...正好是費波納契數列！

若定義費波那契數列的足碼 i 與一般項 f_i 如下表：(遞迴關係式： $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$)

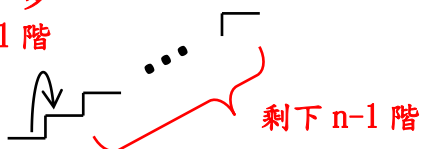
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	0	1	1	2	3	5	8	13	21

則當樓梯階數為 n 時，走法數為 f_{n+1} 。

解釋方式如下：

第一步有兩種走法，可以走 1 階或者 2 階，當樓梯階數為 n 時，如果第一步走 1 階，會剩下 $n-1$ 階；如果第一步走 2 階，會剩下 $n-2$ 階，所以「走完 n 階樓梯的方法數」會等於「走 $n-1$ 階樓梯的方法數」加上「走 $n-2$ 階樓梯的方法數」。

第一步
走 1 階



第一步
走 2 階



活動二：與走樓梯等價的問題

教師帶領學生討論：

教師請學生觀察走樓梯問題的走法描述，會發現可以改成如下的討論方式：

將正整數 n 寫成一堆正整數相加，請問有多少種方法？

但是敘述不夠完整，請學生回答還需要加哪些條件。

參考答案：

(1) 利用 1 或 2 相加

(2) 順序也要考慮(舉例： $1+2+1$ 、 $1+1+2$ 是兩個不同的方法)

7min

(累17)

學習單

實作
評量

15min

(累32)

學習單

實作
評量
口頭
發表

5min

(累37)

口頭
評量

統整後，走樓梯問題可以改成如下的描述方式：

將正整數 n 利用 **1 或 2** 相加，順序也要考慮(舉例： $1+2+1$ 、 $1+1+2$ 是兩個不同的方法)，請問有多少種方法？

由此可知，同樣一個問題可以套入不同的情境裡，接下來的課程，教師將帶領學生討論還有哪些等價描述，並讓學生試著進行解釋。

教師可以參考附件，依據學生的程度與反應狀況提供等價問題。

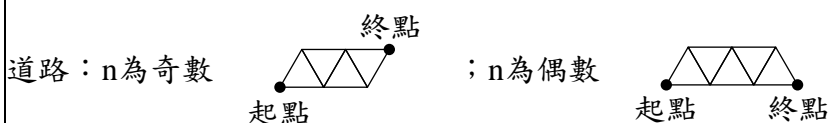
舉例：提供以下4個問題(A~D)

A. 有 n 個人站一排，每個人可以選擇牽手或者不牽手，但如果要牽手只能牽一隻手。

B. 利用 1×2 的元件填滿 $n \times 2$ 的拼圖的方法數。

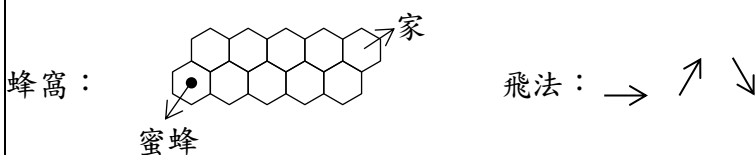


C. 在一條由 n 個正三角形組成的道路上(如下圖)，從起點走到終點且只能向右走的方法數。



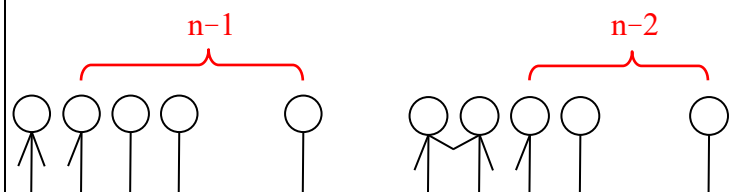
走法： \rightarrow \nearrow \searrow

D. 有一隻蜜蜂在兩排由正六邊形組成的蜂窩中穿牆飛行，從最左邊的房間飛到最右邊的家且只能向右飛的方法數。



參考答案：

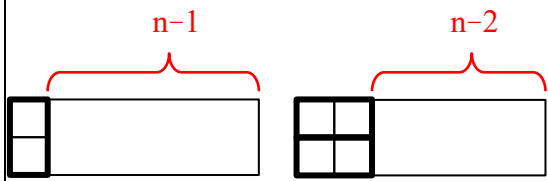
A. 第一個人如果選擇不牽手，則第二個人可以選擇牽或不牽，也就是看剩下的 $n-1$ 個人的牽法；但第一個人如果選擇牽手，則第二個人一定不能牽手，也就是看剩下的 $n-2$ 個人的牽法。



8min
(累45)

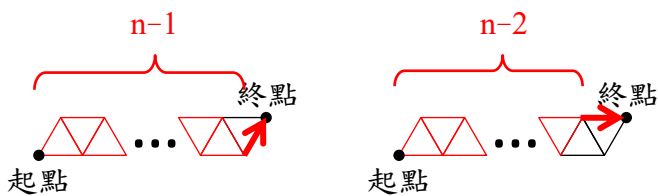
實作
評量

B. 第一片拼圖可以擺直的或者衡的，在 $n \times 2$ 的拼圖中，如果第一片擺直的，會剩下 $(n-1) \times 2$ ；如果第一片擺衡的，會剩下 $(n-2) \times 2$ ，如下圖。



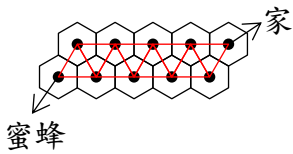
元件	拼圖底板				
1x2	1x2	2x2	3x2	4x2	5x2
練習					
紀錄方法數	①	②	③	⑤	⑧

C. 抵達終點的前一步有兩個走法，當 n 為偶數時，如果最後一步為左下至右上，則前面有 $n-1$ 個三角形，如果最後一步為左至右，則前面有 $n-2$ 個三角形，如下圖。當 n 為奇數時也是以此類推。



三角形路徑	1個△	2個△	3個△	4個△
練習				
紀錄方法數	②	③	⑤	⑧

D. 如下圖，把蜜蜂穿牆飛行的路徑畫出來，會發現跟C一樣。



六邊形蜂窩

練習

紀錄方法數

① ② ③ ⑤ ⑧

Diagram illustrating the path of a bee through a hexagonal honeycomb structure. The path starts at '家' (home) and ends at '蜜蜂' (bee). The path is a zigzag line connecting the points. The diagram shows the path for 1, 2, 3, 5, and 8 steps, with the number of paths increasing according to the Fibonacci sequence.

三、綜合/總結活動

教師讓學生回家思考以上問題，會發現答案都是費波納契數列，學生要試著解釋原因。另外，程度較好的學生可以發揮創意，設計其他等價的提問，並於下一節課與大家分享。舉例：

連線規則 ✓ 兩點之間可以連線或者不連 or ✗ 但是不可以連續連超過2個點

點數 2個點 3個點 4個點 5個點 6個點

練習

紀錄方法數 ② ③ ⑤ ⑧ ⑬

Diagram illustrating the path of a bee through a grid of points. The path starts at the top-left point and ends at the bottom-right point. The path is a zigzag line connecting the points. The diagram shows the path for 2, 3, 4, 5, and 6 points, with the number of paths increasing according to the Fibonacci sequence.

反彈規則 從左上方進入 反彈奇數次 從右上方出去 反彈偶數次 從右下方出去

反彈次數 1次 2次 3次 4次

紀錄方法數 ② ③ ⑤ ⑧

Diagram illustrating the path of a bee through a grid of points. The path starts at the top-left point and ends at the bottom-right point. The path is a zigzag line connecting the points. The diagram shows the path for 1, 2, 3, and 4 bounces, with the number of paths increasing according to the Fibonacci sequence.

第五節教學活動

時間

評量

備註

一、引導活動

活動三：探討不同元素相加的情況

教師提問：

回顧前一節課，在討論將正整數 n 寫成一堆正整數相加時，因為與走樓梯的情境作連結，僅考慮用 1 或 2 相加，若題目改成將正整數 n 利用 大於 1 的正整數 相加，順序也要考慮，請學生討論會有多少種方法？

二、發展活動

學生實作：

學生分組討論，回答學習單中的問題四～五。

問題四：實驗 $n=1, 2, \dots, 7$ ，完成下方表格。

n	加法描述	方法數
1	無	0
2	2	1
3	3	1
4	4、2+2	2
5	5、2+3、3+2	3
6	6、2+4、4+2、3+3、2+2+2	5
7	7、2+5、5+2、3+4、4+3、2+2+3、2+3+2、3+2+2	8

問題五：觀察上方表格，你發現了甚麼？請試著解釋觀察到的規律。

方法數 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... 正好是費波納契數列！

若定義費波那契數列的足碼 i 與一般項 f_i 如下表：(遞迴關係式： $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	0	1	1	2	3	5	8	13	21

則正整數 n 利用大於 1 的正整數相加的方法數為 f_{n-1} 。

解釋方式如下：

歸納一般情形 $n=k$ ：(假設 $n=k$ 時的方法數為 a_k)

「 $n=k$ 時的方法數」等於從「 $n=k-2$ 時的方法數」加到「 $n=1$ 時的方法數」再加 1，即 $a_k = a_{k-2} + a_{k-3} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 + 1$ ，這個式子和費波那契數列是等價的！

5min
(累5)

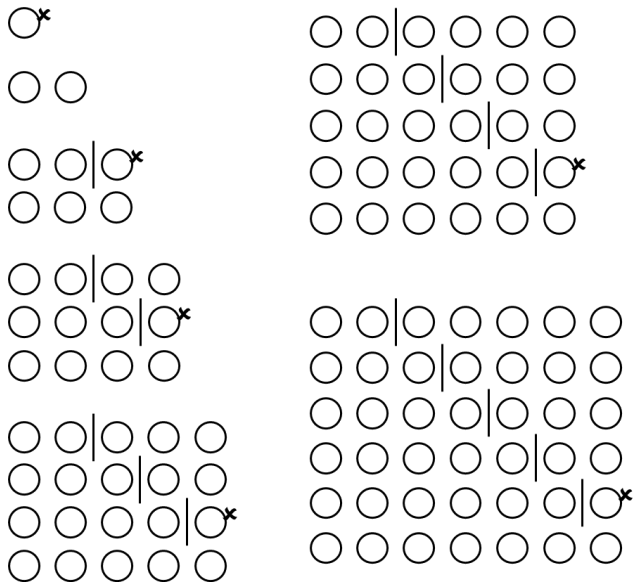
口頭
評量

10min
(累15)

學習單
實作
評量

18min
(累33)

學習單
實作
評量
口頭
發表



證明：(此證明可以讓學生先思考、提出想法)

$$\begin{aligned}
 f_k &= f_{k-1} + f_{k-2} \\
 &= f_{k-2} + f_{k-2} + f_{k-3} \\
 &= f_{k-2} + f_{k-3} + f_{k-3} + f_{k-4} \\
 &= f_{k-2} + f_{k-3} + f_{k-4} + f_{k-4} + f_{k-5} \\
 &= \dots \\
 &= f_{k-2} + f_{k-3} + \dots + f_2 + f_1 + f_0 + f_1 \\
 &= f_{k-2} + f_{k-3} + \dots + f_2 + f_1 + 1
 \end{aligned}$$

三、綜合/總結活動

總結這四節課的內容，讓學生體驗到費波納契數列的深度與廣度。

10min
(累43)

學習單
實作
評量
口頭
發表

2min
(累45)

四、教學省思及建議 (如：課程教學、環境佈置...等)

1. 課程設計採循序漸進引導學生，希望學生在探索的過程中能從發散的思考聚斂到所要學習的事物，因此學習單的設計須以單面印刷，單張給予學生。
2. 學生宜採異質性分組，使每組皆有理解力較強以及善於發表的學生帶領小組討論。
3. 提供學生參考別組同學作法的機制，除了可以避免犯同樣的錯誤，也能刺激組間的競爭，並在最後達到全班合作一起得出結論。


五、附件


附件一 第1節補充資料


一、費波那契數列問題

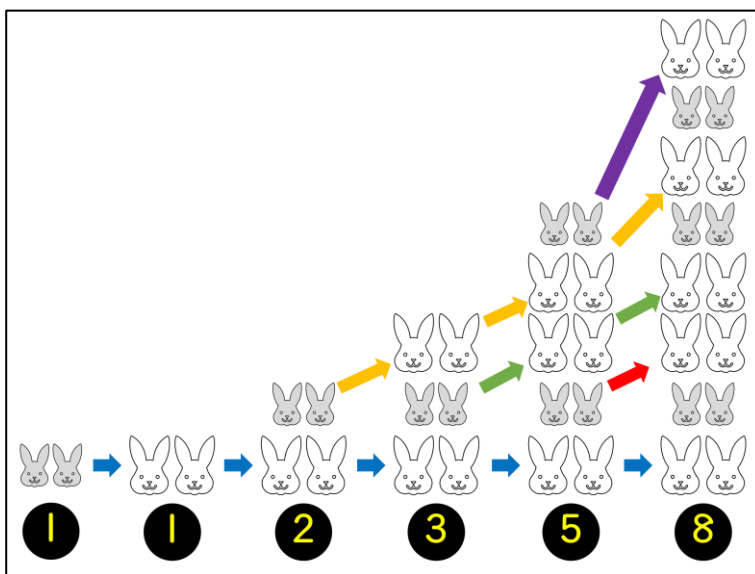
費波那契 (Leonardo Pisano Fibonacci, 1170-1250) 誕生於850年前左右的義大利人，其本名為 Leonardo Pisano Bigollo, Fibonacci 為其外號，意思是「Son of Bonacci (波那契之子)」。父親是商人，經常需要計算，因此啟發了費波那契對數學的興趣。當時歐洲使用的數字為羅馬數字，費波那契常隨著父親在地中海、北非一帶做生意，有機會接觸到來自東方的阿拉伯數字，覺得十分便利，後來在著作《計算之書》介紹了阿拉伯數字系統，對歐洲造成重大影響。

費波那契在《計算之書》中，提出一個有趣的問題：「假設有一對新生小兔子，出生一個月後長成大兔子，開始繁殖，之後每隔一個月可生下一對小兔子，而小兔子也依相同的規律長大繁殖。在持續生育且皆不死亡的理想狀況下，兔子的數量會如何變化呢？」

第一個月有一對新生的小兔子 

第二個月小兔子長成一對大兔子 

第三個月大兔子生育一對小兔子 



依此規律得到的兔子對數依序為1, 1, 2, 3, 5, 8, ……，這些數形成一個數列，被稱為「費波那契數列 (Fibonacci Sequence)」，簡稱「費氏數列」。

二、費波那契數列與黃金比例

將費波那契數列每一項的平方值求出，如下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
f_n^2	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	...

可以發現 $1 + 1 + 4 = 6 = 2 \times 3$

$$1 + 1 + 4 + 9 = 15 = 3 \times 5$$

$$1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40 = 5 \times 8$$

$$1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104 = 8 \times 13$$

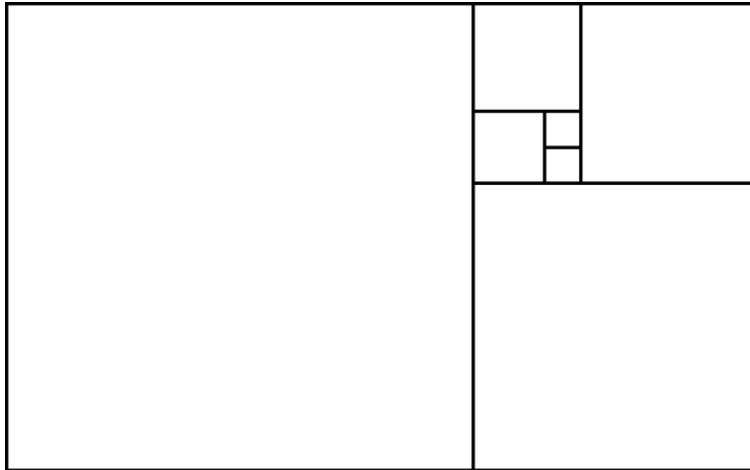
$$1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 = 273 = 13 \times 21$$

.....

可以得到 $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n \times f_{n+1}$ 。

為什麼「 $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n \times f_{n+1}$ 」是對呢？我們可以用下面的步驟繪製的矩形來說明：

1. 先繪製一個邊長為1的正方形。
2. 在第1個正方形下方繪製第2個邊長為1的正方形。
3. 接著在左邊繪製邊長為2的正方形。
4. 接著在上方繪製邊長為3的正方形。
5. 接著在右方繪製邊長為5的正方形。
6. 以此規律依序繪出邊長為費波那契數（Fibonacci Number）的正方形，則可畫出如下圖：



觀察上述步驟所完成的矩形，可以發現由 f_1 、 f_2 、 f_3 、.....、 f_n 為邊長的正方形可拼成一個長為 f_{n+1} 、寬為 f_n 的矩形，故 $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n \times f_{n+1}$ 。

進一步，我們將費波那契數列相鄰兩項中，後項除以前項算出比值，完成下表：

後項	前項	比例=後項/前項
1	1	1
2	1	2
3	2	1.5
5	3	1.66666
8	5	1.6
13	8	1.625
21	13	1.61538
34	21	1.61904
55	34	1.61764
89	55	1.61818
144	89	1.61797
233	144	1.61805
377	233	1.61802
610	377	1.61803
987	610	1.61803
⋮	⋮	⋮

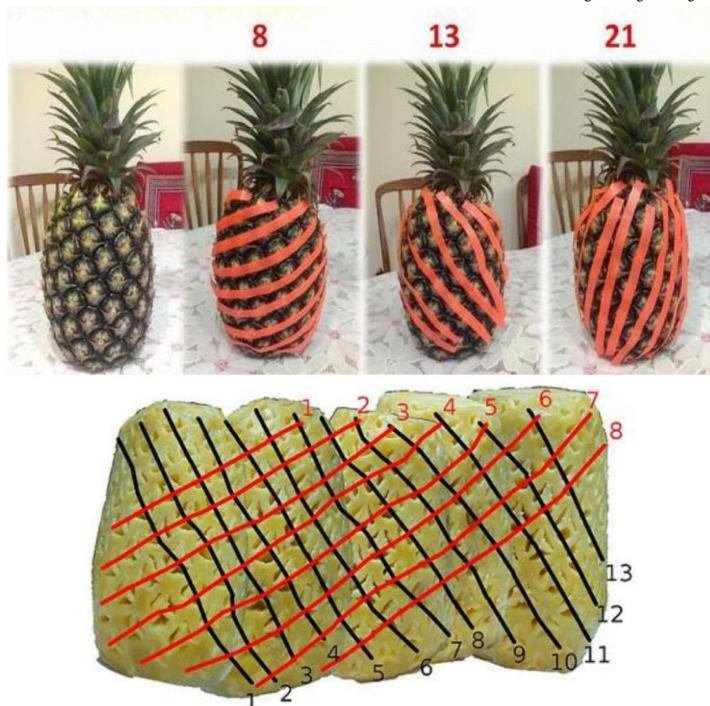
由上表可以觀察到該比值愈來愈趨近黃金比例 ϕ 值 (1.618033988……)，所以愈畫愈大後，該矩形的長寬比愈接近黃金比例，該矩形也趨近「黃金矩形 (一個長和寬的比為黃金比例 ϕ 的矩形)」。

三、大自然中的費波那契數列

動手做一做實驗：

1. 準備一顆鳳梨及一捲彩色膠帶。
2. 找一條由左上到右下的鳳梨果目螺旋，將膠帶貼在螺旋上，從鳳梨尾貼到鳳梨頭。
3. 沿著貼好膠帶的螺旋，往上或往下找出其他螺旋，並貼上膠帶，直到每個果目都貼上。
4. 數數看有多少條由左上到右下的螺旋。
5. 改成尋找由右上到左下的螺旋，將膠帶貼在螺旋上。
6. 數數看有多少條由右上到左下的螺旋。

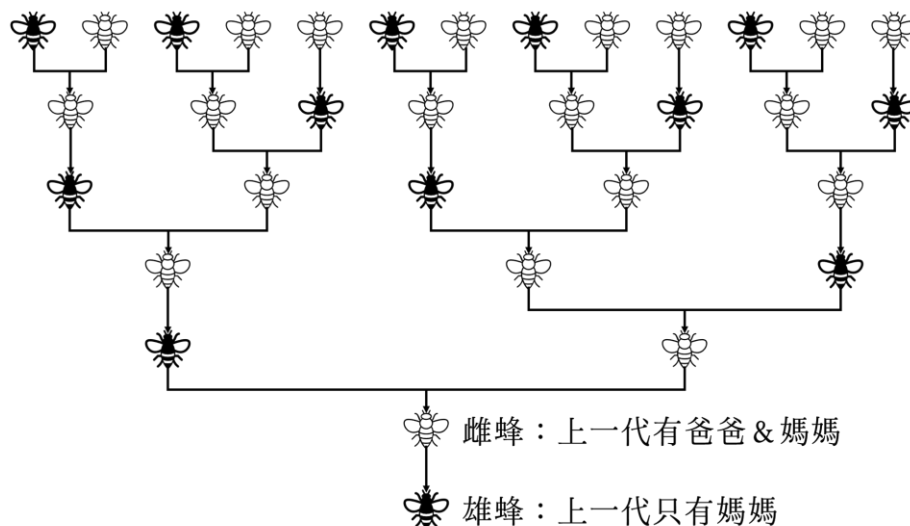
做完實驗後，應該可確認鳳梨果目螺旋的數量為8與13，若鳳梨的果目排列更整齊一點，還可以數一數走向更陡直的螺旋，得出21條。而8、13、21這三個數字恰為 f_6 、 f_7 、 f_8 。



綻放花朵的向日葵種子同時有順時針與逆時針方向的螺旋排列，仔細數數會發現兩組螺線數往往也是費波那契數列中相鄰的兩項，如34和55、55和89、89和144等，如果向日葵夠大的話，甚至可以數出144和233。



雄蜂是由未受精的卵孵化出來的，所以只有媽媽沒有爸爸，而雌蜂是有爸爸和媽媽的，因此如果去觀察雄蜂的譜系，如下圖，從第一代到第七代的雄蜂加雌蜂總數依序是：1、1、2、3、5、8、13，就是費波拿契數列。



四、費波那契數列的應用

(一) 費波那契時鐘

小明在逛文具店時，發現一款特別的時鐘。這個時鐘的螢幕是由五個不同大小的黑框正方形組合而成，在不同時間下，會出現對應的紅(R)、綠(G)、藍(B)三種顏色。在詢問老闆後，得知這款特別的時鐘叫作「費波那契時鐘」，其五個正方形的邊長恰好對應到費波那契數列前五個數字1, 1, 2, 3, 5。其中紅色顯示的正方形邊長表示「小時」；綠色顯示的正方形邊長表示「分鐘」；藍色顯示的正方形邊長表示「小時和分鐘」；白色顯示則可忽略不理。

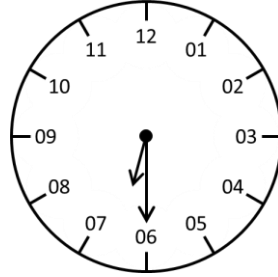
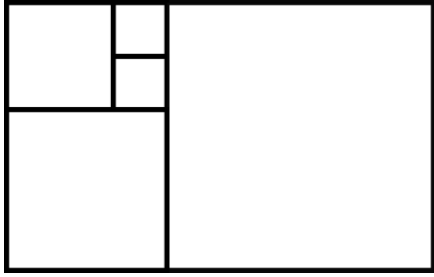
在閱讀費波那契時鐘的時間，必須運用到一些計算：

小時 = 紅色正方形邊長 + 藍色正方形邊長；

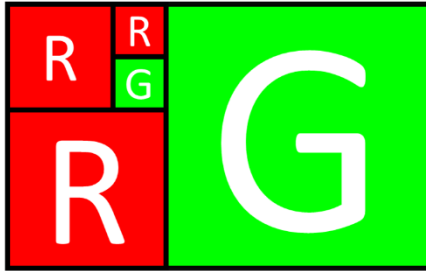
分鐘 = (綠色正方形邊長 + 藍色正方形邊長) × 5

(1) 連連看：下列各時鐘所表示的時間

(2) 畫畫看：請在下圖中的費波那契鐘畫出「06：30」的顯示方式！



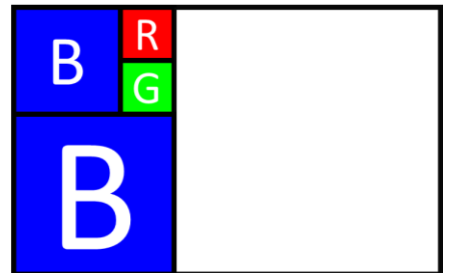
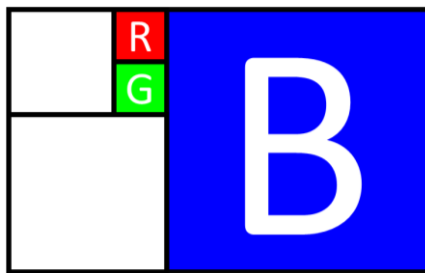
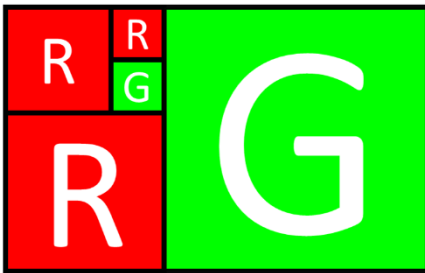
參考答案：



(3) 想一想：你覺得在同一個時間下，會不會只有唯一的顯示方式？

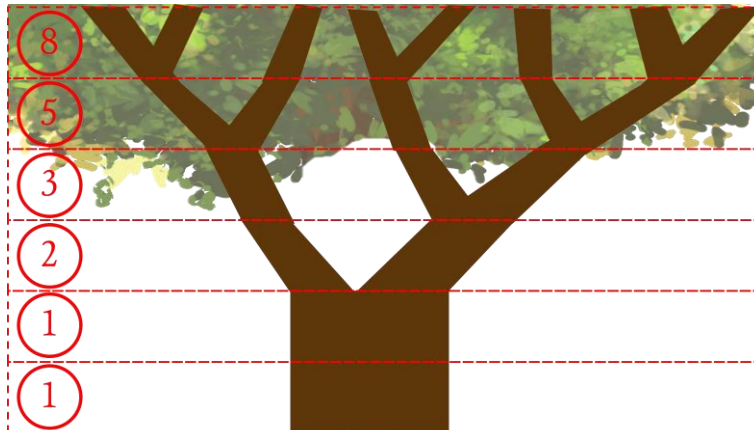
如果會，請解釋原因；如果不會，請舉例說明。

參考答案：不會，舉例以下三種均為06：30的顯示方式。



(二) 繪製樹木的使用

在視覺藝術課畫樹木時，若先畫一根主幹，然後左右分岔畫出兩根支幹，支幹再往上分岔成兩根小枝，依此規則由粗而細。畫完後總讓人不滿意，有一種不真實的感覺。事實上，樹木的成長模式也遵循費波拿契數列，所以在畫樹木時，由下而上的枝幹數能夠符合費波拿契數列，畫出來的樹木就顯得比較真實。如下圖：



上臺報告評分規準

給分 向度	5	4	3	2	1
內容完整度	內容完全正確且深入，依照內容修飾呈現，文字長度適宜，確實標示出重點。	正確表達扼要通順，依照內容修飾呈現，且有層次，確實表達重點。	內容約80%正確與主題相關。	內容對錯參半40~80%與主題有關，能將內容以簡短文字條列式呈現。	內容錯誤百出，不到40%與主題不相關，僅能以段落式敘述呈現。
內容圖表	能運用圖表分析，完整呈現內容，表達出深層及自我的想法。	能運用圖表呈現，表達出內容的意涵，但未能充分說明。	有運用圖表呈現，約80%與主題內容有相關性。	有運用圖表呈現，但僅40~80%與主題內容有相關。	圖表與主題不符，或沒有運用圖表呈現，僅用文字表達內容。
口語表達	口語表達清楚，表達生動活潑，能吸引聽眾注意，且聯繫前後文化，依情境適切掌握速度，語調有抑頓挫。	口齒清晰，說明有架構。	完成約80%報告重點。	完成40~80%報告重點。	辭不達意，音量太小，聽不清楚。
回應答辯	使用合宜的資訊，清楚回答觀眾問題。	清楚回答觀眾的問題。	試圖回答觀眾問題，但是聽者並不理解或者解釋有錯誤。	僅以最簡短的答案回答觀眾問題，並無加以說明解釋。	無法回應提問，在現場呆住。
簡報效果	效果與內容相呼應，整體畫面、色調呈現舒適。或適當強化重點，吸引觀眾注意。	效果與內容相呼應，整體畫面、色調呈現尚可。有強化重點或能適當吸引觀眾注意。	強化重點的效果與內容相呼應。	整份簡報僅有文字、單一顏色、一種字體，無任何效果。	整體畫面凌亂。
小組分工	依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作，能互助合作。	依照組員專長進行工作分配，妥善分配工作。	僅工作分配，每人皆能完成分內任務。	僅工作分配，大部分成員能完成分內任務。	分工不均，少有組員能完成分內任務。

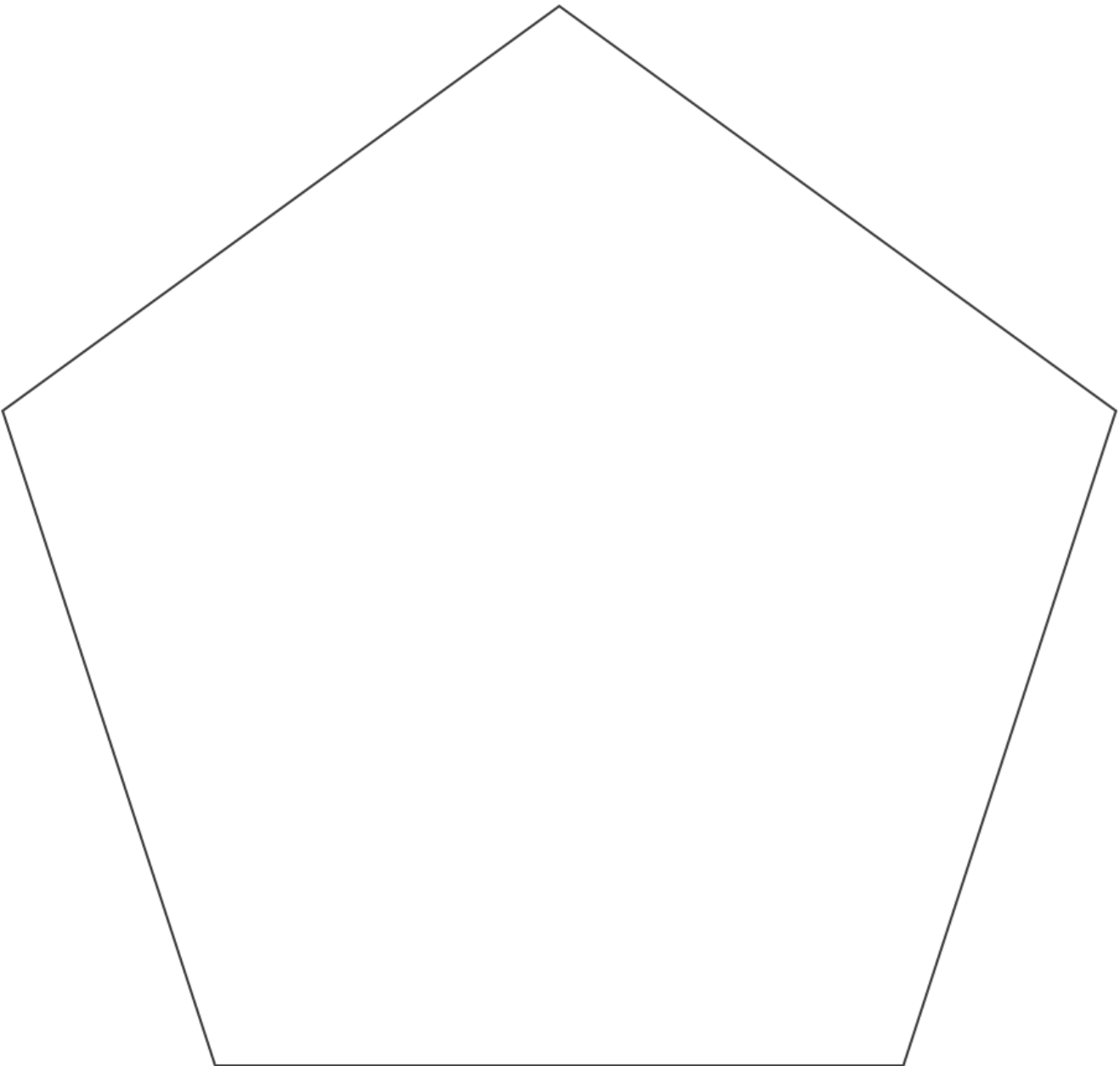
上臺報告評分表

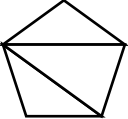
組別 向度	第1組	第2組	第3組	第4組	第5組	第6組
內容完整度						
內容圖表						
口語表達						
回應答辯						
簡報效果						
小組分工						
小組得分						
優點與建議						

「拼圖遊戲」學習單

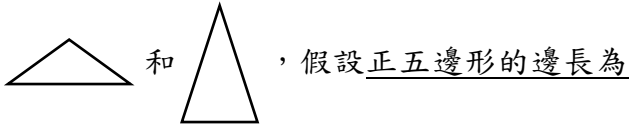
熱身活動：正五邊形中的三角形

1. 請同學在下方的正五邊形上畫對角線，觀察對角線所切出來的三角形。
2. 有些對角線之間會產生交點，如果再繼續將交點連線，且讓直線兩端延伸超出原本的正五邊形外，觀察圖中出現的三角形，寫下你有甚麼發現？

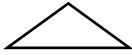



3.  如左圖，畫出這兩條對角線後，

可以在正五邊形中切出兩種三角形，分別是



和 φ ，假設正五邊形的邊長為 1，對角線的長度為 φ ，請問這兩種三角形的邊長分別是多少？完成右方表格。

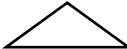
元件編號	A	B
圖示		
腰的長度		
底邊的長度		

活動一：「拼」出相似三角形


- 請小組同學試著利用兩種三角形(元件 A、B)，在附件中拼出更大的三角形，但是拼出來的圖形要和原來的元件 A 或元件 B 相似。
 ※ 注意：第1、3組做與元件A相似的三角形，第2、4組做與元件B相似的三角形。
- 把拼出的三角形由小到大排列在桌上，觀察這些圖形的規律，請小組同學討論是否能找出有系統的拼法？

筆記欄

3. 請同學將三角形中兩種元件的數量及總數，紀錄在下方表格。(可以參考別組拼出來的圖形)

表1：與元件A相似的三角形 

腰邊長	1	φ	2	$1+\varphi$	3	2φ	$2+\varphi$	4	$1+2\varphi$
元件A數量									
元件B數量									
元件數量總和									

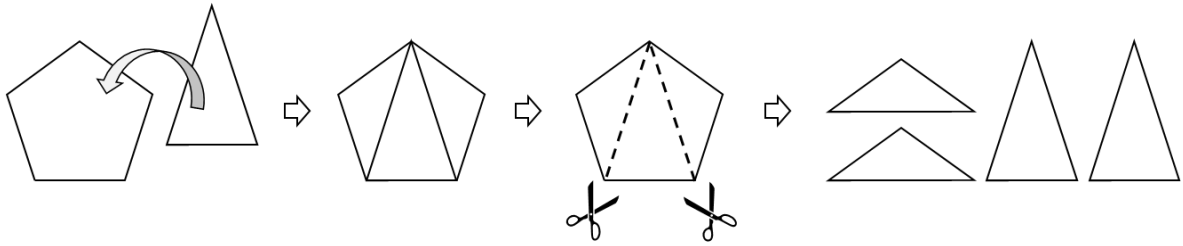
表2：與元件B相似的三角形 

腰邊長	φ	$1+\varphi$	2φ	$1+2\varphi$	3φ	$2+2\varphi$	$1+3\varphi$	4φ	$2+3\varphi$
元件A數量									
元件B數量									
元件數量總和									

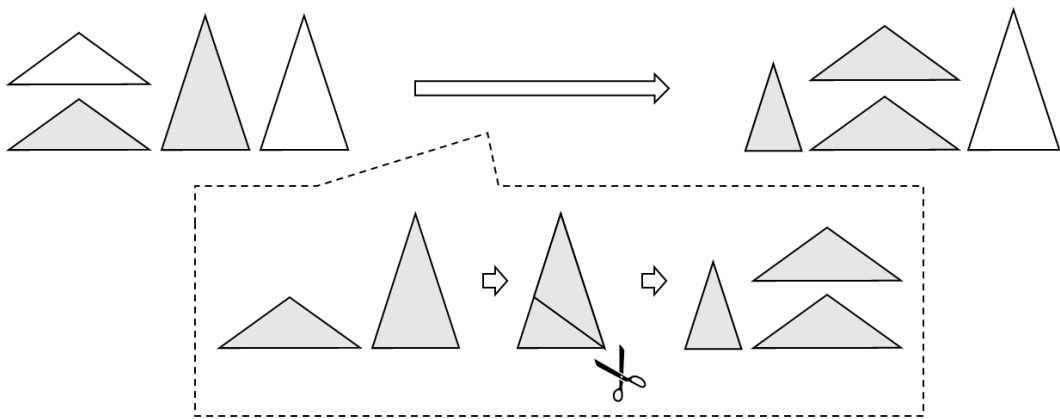
4. 請同學觀察表格中的數字或拼出來的圖形，寫下你有甚麼發現？

活動二：「剪」出相似三角形

1. 每組同學會拿到一個正五邊形及一個相似元件 B，如下圖，將兩個圖形重疊，延著邊線剪下，可以得到兩個相似元件 A 和兩個相似元件 B；




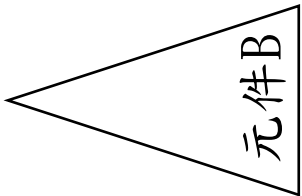
拿起剛剛剪出的圖形中，相似元件 A 和 B 各一個，重疊後，延著邊線剪下，可以得到一個較小的相似元件 B；

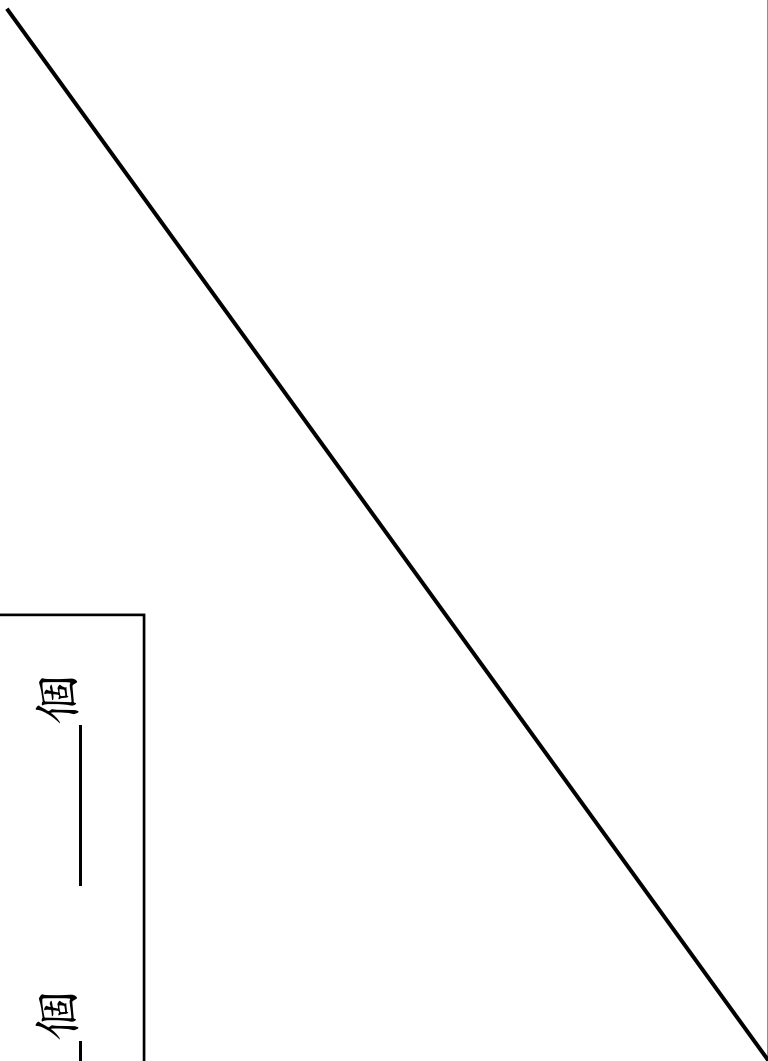


再繼續拿出最小的相似元件 A 和 B 各一個，依照上方的步驟繼續重疊剪下，直到剪出與活動一中拼圖元件一樣的大小。


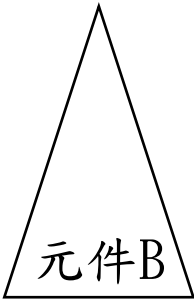
2. 請同學對應剪完的圖形和活動一中拼貼出來的哪一個圖形大小是一樣的，記錄使用的元件總數，觀察這些數字，寫下你有甚麼發現？並說明理由。

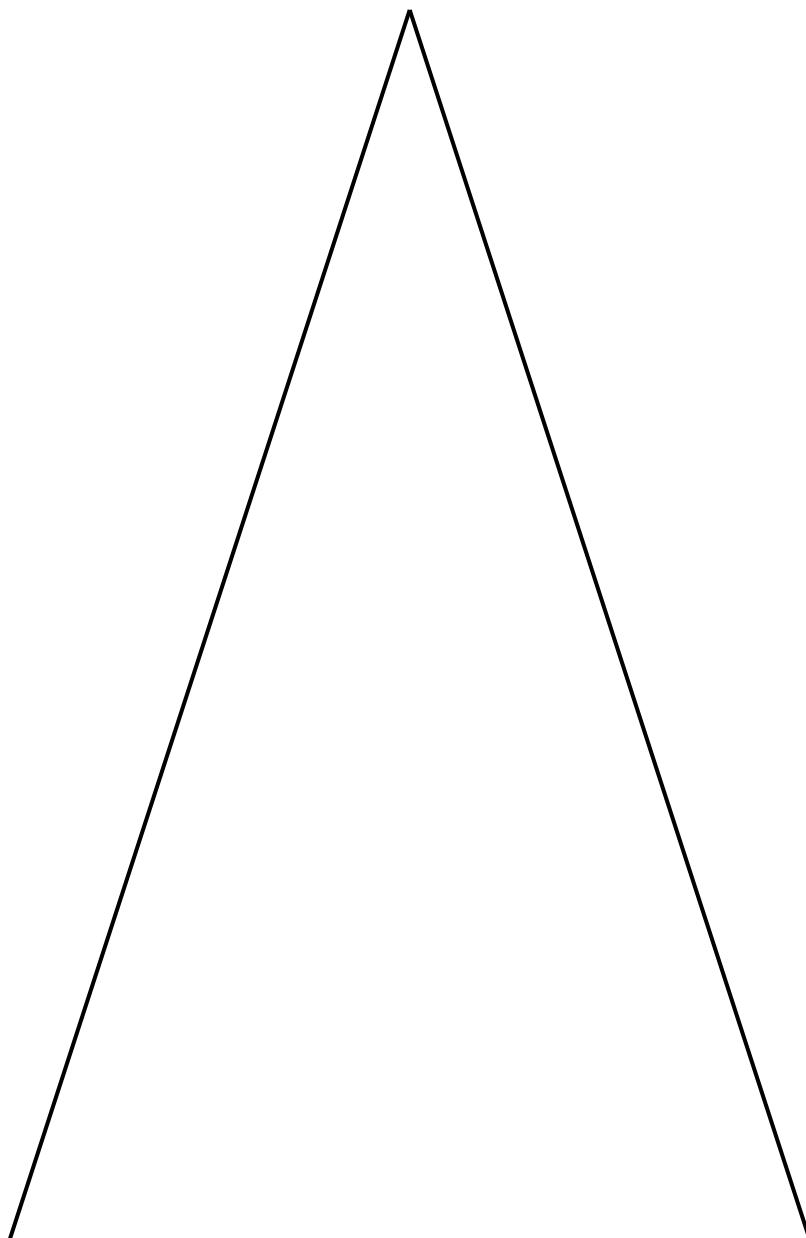
任務：請同學試著拼出與元件A相似的圖形！

		總和
_____個	_____個	_____個



任務：請同學試著拼出與元件B相似的圖形！

 _____個	 _____個	總和 _____個
---	---	--------------



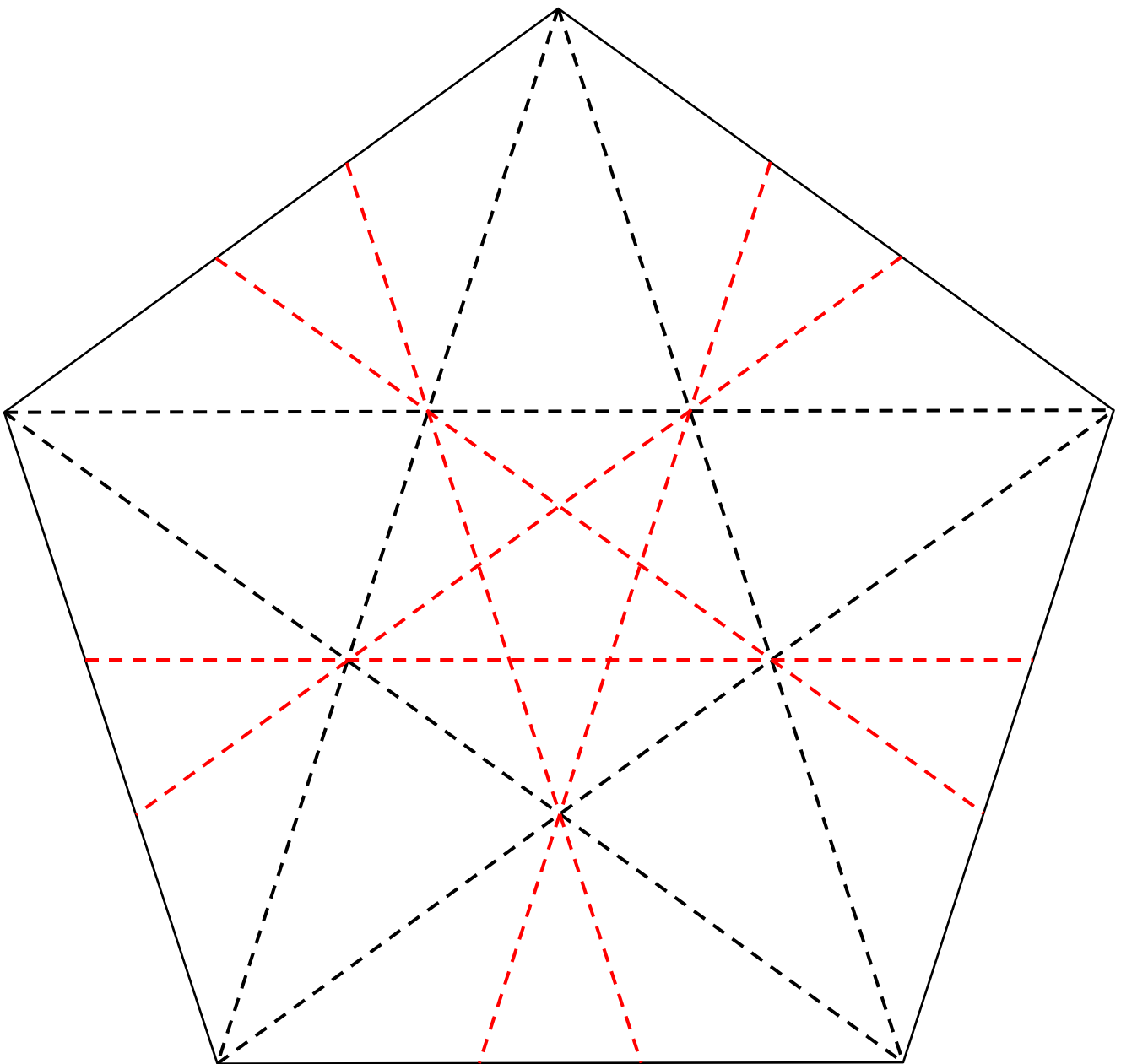
「拼圖遊戲」學習單 (答案)

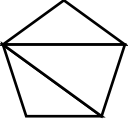
熱身活動：正五邊形中的三角形

1. 請同學在下方的正五邊形上畫對角線，觀察對角線所切出來的三角形。
2. 有些對角線之間會產生交點，如果再繼續將交點連線，且讓直線兩端延伸超出原本的正五邊形外，觀察圖中出現的三角形，寫下你有甚麼發現？

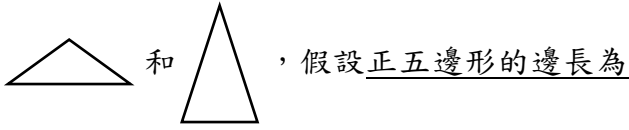
只有兩種三角形，分別是

- 等腰鈍角三角形 ($36^\circ-108^\circ-36^\circ$)
- 等腰銳角三角形 ($72^\circ-36^\circ-72^\circ$)

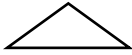



3.  如左圖，畫出這兩條對角線後，

可以在正五邊形中切出兩種三角形，分別是



和 φ ，假設正五邊形的邊長為 1，對角線的長度為 φ ，請問這兩種三角形的邊長分別是多少？完成右方表格。

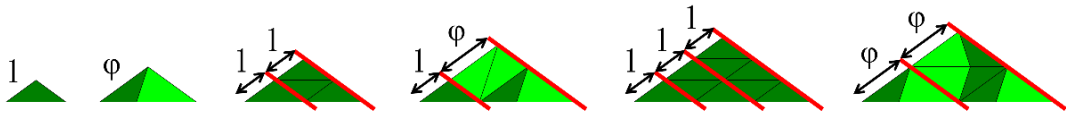
元件編號	A	B
圖示		
腰的長度	1	φ
底邊的長度	φ	1

活動一：「拼」出相似三角形

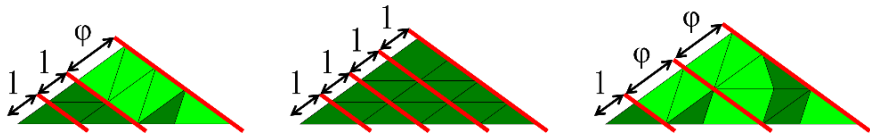
- 請小組同學試著利用兩種三角形(元件 A、B)，在附件中拼出更大的三角形，但是拼出來的圖形要和原來的元件 A 或元件 B 相似。
- 把拼出的三角形由小到大排列在桌上，觀察這些圖形的規律，請小組同學討論是否能找出有系統的拼法？

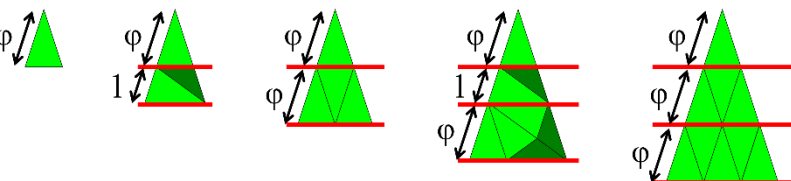
筆記欄

將腰的邊長一層層向外疊加，每一次可以加1或者 φ 的長度。

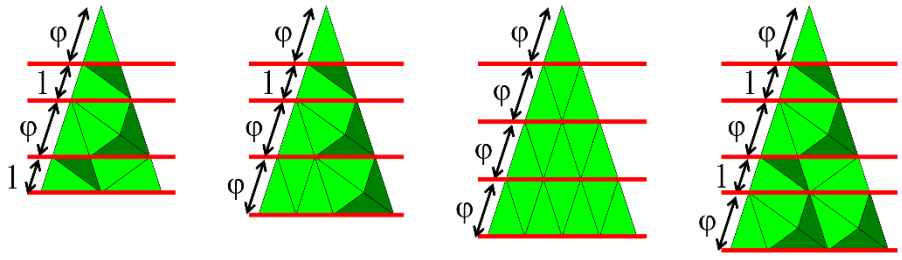


與元件A相似：

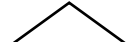




與元件B相似：



3. 請同學將三角形中兩種元件的數量及總數，紀錄在下方表格。(可以參考別組拼出來的圖形)

表1：與元件A相似的三角形 

腰邊長	1	φ	2	$1+\varphi$	3	2φ	$2+\varphi$	4	$1+2\varphi$
元件A數量	1	1	4	2	9	4	5	16	5
元件B數量	0	1	0	3	0	4	5	0	8
元件數量總和	1	2	4	5	9	8	10	16	13

表2：與元件B相似的三角形 

腰邊長	φ	$1+\varphi$	2φ	$1+2\varphi$	3φ	$2+2\varphi$	$1+3\varphi$	4φ	$2+3\varphi$
元件A數量	0	1	0	3	0	4	5	0	8
元件B數量	1	2	4	5	9	8	10	16	13
元件數量總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

4. 請同學觀察表格中的數字或拼出來的圖形，寫下你有甚麼發現？

舉例：表2中的數字可以看到等差數列、二級等差數列、平方數列、費氏數列...

腰長	φ	$1+\varphi$	2φ	$1+2\varphi$	3φ	$2+2\varphi$	$1+3\varphi$	4φ	$2+3\varphi$
A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

等差數列

腰長	φ	$1+\varphi$	2φ	$1+2\varphi$	3φ	$2+2\varphi$	$1+3\varphi$	4φ	$2+3\varphi$
A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

二級等差數列

腰長	φ	$1+\varphi$	2φ	$1+2\varphi$	3φ	$2+2\varphi$	$1+3\varphi$	4φ	$2+3\varphi$
A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

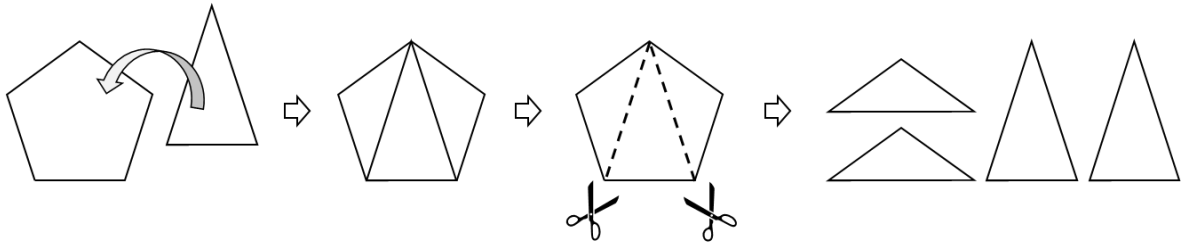
平方數列

腰長	φ	$1+\varphi$	2φ	$1+2\varphi$	3φ	$2+2\varphi$	$1+3\varphi$	4φ	$2+3\varphi$
A	0	1	0	3	0	4	5	0	8
B	1	2	4	5	9	8	10	16	13
總和	1	3	4	8	9	12	15	16	21

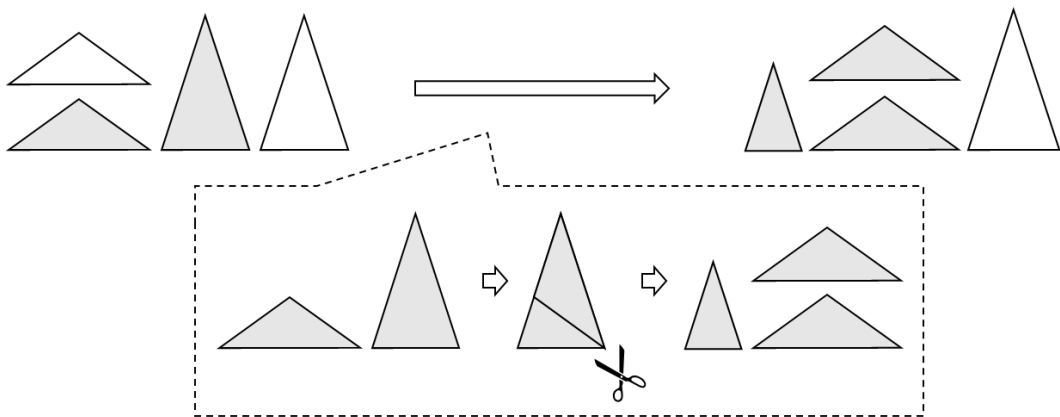
費氏數列

活動二：「剪」出相似三角形

1. 每組同學會拿到一個正五邊形及一個相似元件 B，如下圖，將兩個圖形重疊，延著邊線剪下，可以得到兩個相似元件 A 和兩個相似元件 B；



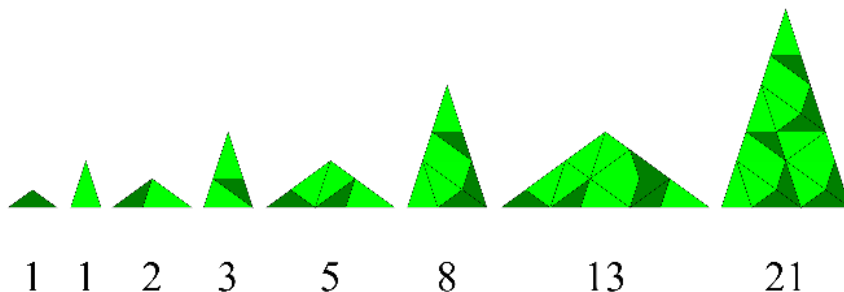
拿起剛剛剪出的圖形中，相似元件 A 和 B 各一個，重疊後，延著邊線剪下，可以得到一個較小的相似元件 B；



再繼續拿出最小的相似元件 A 和 B 各一個，依照上方的步驟繼續重疊剪下，直到剪出與活動一中拼圖元件一樣的大小。

2. 請同學對應剪完的圖形和活動一中拼貼出來的哪一個圖形大小是一樣的，記錄使用的元件總數，觀察這些數字，寫下你有甚麼發現？並說明理由。

將兩類相似三角形交錯排列，其元件總數量為費波那契數列！



由剪紙的過程會發現，從上方的第三個圖形開始，每個圖形都可以剪成前兩個圖形，也就是連續兩個圖形中元件數量的和等於下一個圖形的數量，這正是費波那契數列的遞迴關係式。

「走樓梯問題」學習單

【活動一：走樓梯問題】

爬樓梯是大家日常中都會做的事情，但是同學們有想過以下這道問題嗎？




如果樓梯只有一階，上樓梯的走法當然只有一種；

如果樓梯有兩階，你可以選擇一步1階，也可以一步2階，所以有兩種走法；

那麼如果樓梯有三階以上，會有幾種走法呢？

注意：基於安全考量，不可以一步跨3階以上喔！

舉例：當樓梯階數=3時，共有以下3種走法。

圖示			
加法表示	$1+1+1$	$1+2$	$2+1$

問題一：如果樓梯有五階，則總共有幾種走法？

問題二：請完成下方表格。

樓梯階數	走法描述	方法數
1	1	1
2	$1+1$ 、2	2
3	$1+1+1$ 、 $1+2$ 、 $2+1$	3
4		
5		
6		

問題三：觀察上方表格，你發現了甚麼？請試著解釋觀察到的規律。

【活動二：與走樓梯等價的問題】

請學生觀察走樓梯問題的走法描述，可以改成如下的討論方式：

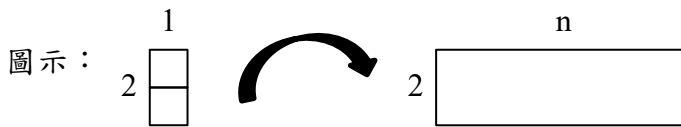
將正整數 n 寫成一堆正整數相加，請問有多少種方法？

但是敘述不夠完整，請學生寫下還需要加哪些條件。

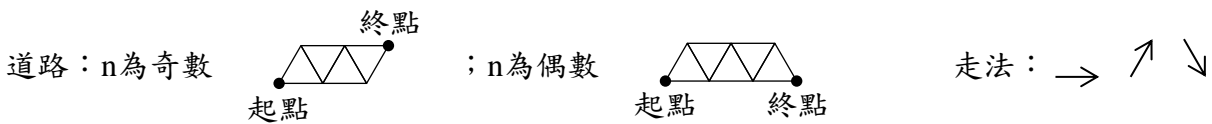
由此可知，同樣一個問題可以套入不同的情境裡，底下有另外4個等價的問題(A~D)，請同學試著解釋為何這些問題的答案都是費波納契數列。

A. 有 n 個人站一排，每個人可以選擇牽手或者不牽手，但如果要牽手只能牽一隻手。

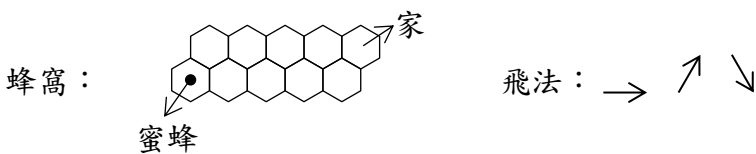
B. 利用 1×2 的元件填滿 $n \times 2$ 的拼圖的方法數。






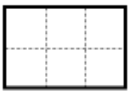

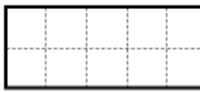

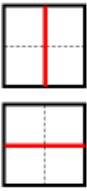







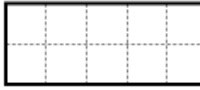

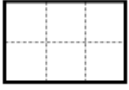
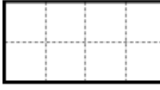
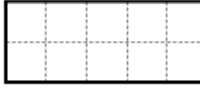
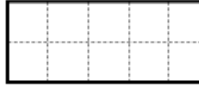
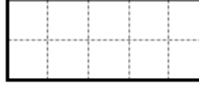
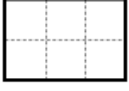

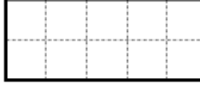
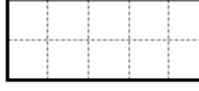
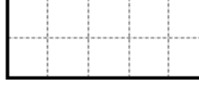



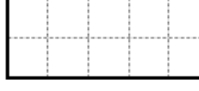
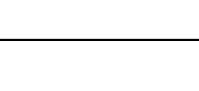
C. 在一條由 n 個正三角形組成的道路上(如下圖)，從起點走到終點且只能向右走的方法數。


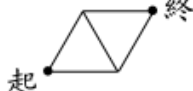
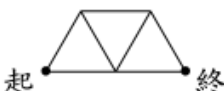
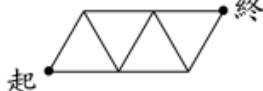








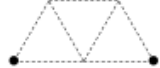




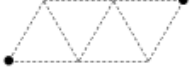
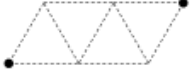



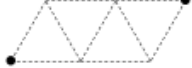
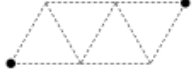





D. 有一隻蜜蜂在兩排由正六邊形組成的蜂窩中穿牆飛行，從最左邊的房間飛到最右邊的家且只能向右飛的方法數。



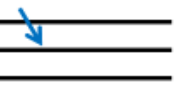
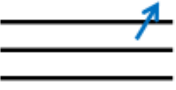
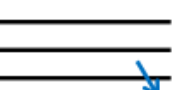

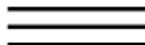

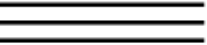
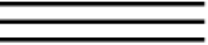

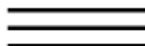
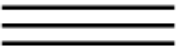
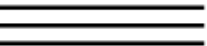
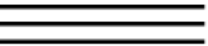

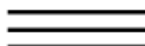
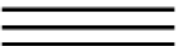
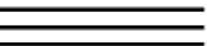
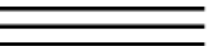

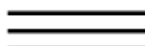
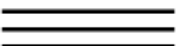
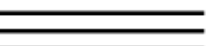
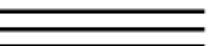

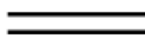
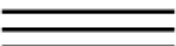
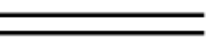
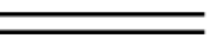
【活動二：與走樓梯等價的問題-學生練習】

元件	拼圖底板					
1x2	1x2	2x2	3x2	4x2	5x2	
						
練習						
						
						
						
						
紀錄方法數	①	②	○	○	○	




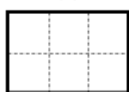
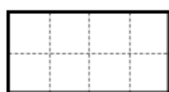
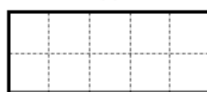

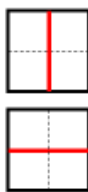
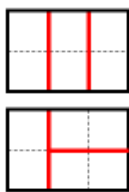
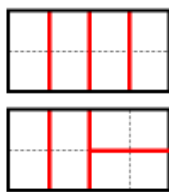
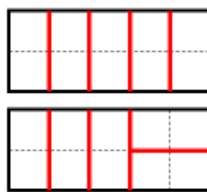
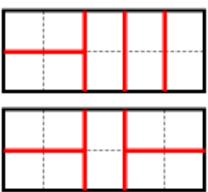


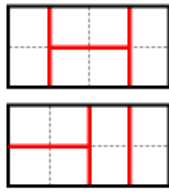
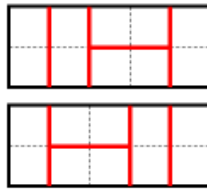
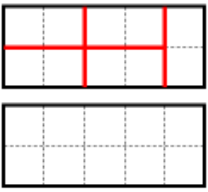
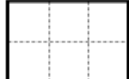


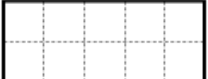

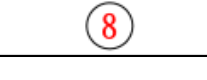
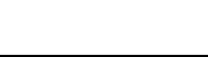


三角形路徑	1個△	2個△	3個△	4個△		
						
練習	 	    	    	    	    	
紀錄方法數	②	○	○	○		

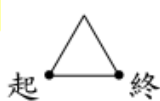
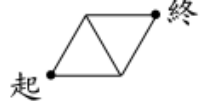
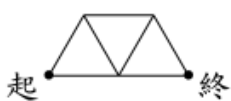
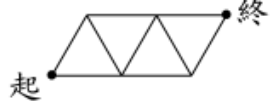

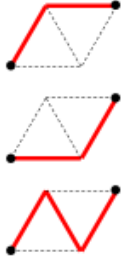
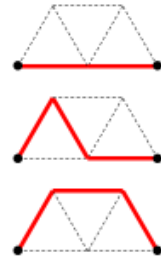
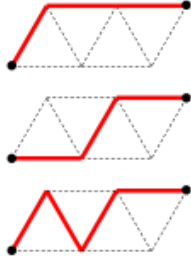
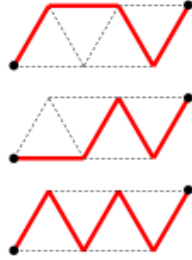
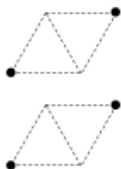
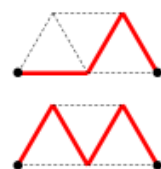
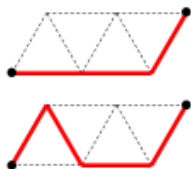
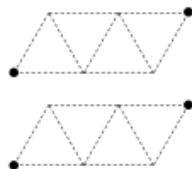
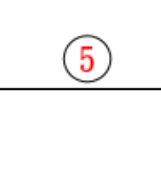
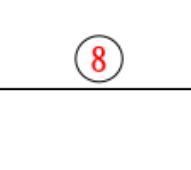
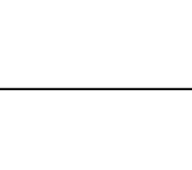
六邊形蜂窩						
練習						
紀錄方法數	①	○	○	○	○	○

連線規則	✓ 兩點之間可以連線或者不連 	✗ 但是不可以連續連超過2個點 			
點數	2個點	3個點	4個點	5個點	6個點
練習					
紀錄方法數	②	○	○	○	○

反彈規則	從左上方進入 	反彈奇數次  從右上方出去	反彈偶數次  從右下方出去	
反彈次數	1次	2次	3次	4次
				
				
				
				
				
紀錄方法數	②	○	○	○

【活動二：與走樓梯等價的問題-答案】

元件	拼圖底板					
1x2	1x2	2x2	3x2	4x2	5x2	
						
練習						
						
						
						
						
紀錄 方法數	①	②	③	⑤	⑧	

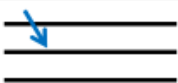
三角形 路徑	1個△	2個△	3個△	4個△	
					
練習					
					
					
紀錄 方法數	②	③	⑤	⑧	

六邊形蜂窩					
練習					
紀錄方法數	①	②	③	⑤	⑧

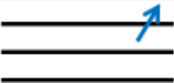
連線規則	✓ 兩點之間可以連線或者不連 or		✗ 但是不可以連續連超過2個點		
點數	2個點	3個點	4個點	5個點	6個點
練習					
紀錄方法數	②	③	⑤	⑧	⑬

反彈
規則

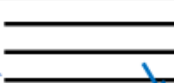
從左上方
進入



反彈奇數次
從右上方出去

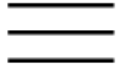


反彈偶數次
從右下方出去

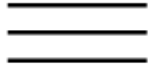


反彈
次數

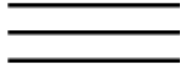
1次



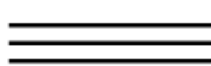
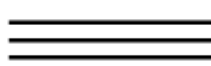
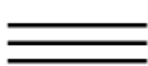
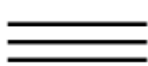
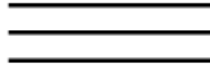
2次



3次



4次



紀錄
方法數

②

③

⑤

⑧

「正整數相加延伸」學習單

【活動三：探討不同元素相加的情況】

回顧前一節課，在討論將正整數 n 寫成一堆正整數相加時，因為與走樓梯的情境作連結，僅考慮用 1 或 2 相加，若題目改成將正整數 n 利用 大於 1 的正整數 相加，順序也要考慮，請學生討論會有多少種方法？

問題四：實驗 $n=1, 2, \dots, 7$ ，完成下方表格。

n	加法描述	方法數
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

問題五：觀察上方表格，你發現了甚麼？請試著解釋觀察到的規律。

※附件示例說明※

- 1、教材：講義或PPT等。
- 2、補充資料。
- 3、學生學習單。
- 4、教學活動評量。
- 5、學生回饋。
- 6、學生成果：
 - (1)學習單：佳作至少三份掃描電子檔。
 - (2)海報：請拍照並繳交照片。
 - (3)影片：學生口頭發表、實驗實作等課程實錄。全部影片或重要片段。

※注意事項※

- 1、請留意版權：

盡量使用自編教材、照片或圖片。若參考使用網路或其他來源之資源，請標註出處。
- 2、請留意學生個資保護：

學生學習單資料請遮蔽或請勿呈現其班級、姓名、座號。